

كلية التجارة

مقدمة في بحوث العمليات

(نماذج وتطبيقات)

دكتور

إبراهيم موسى عبد الفتاح

أستاذ الرياضيات والإحصاء

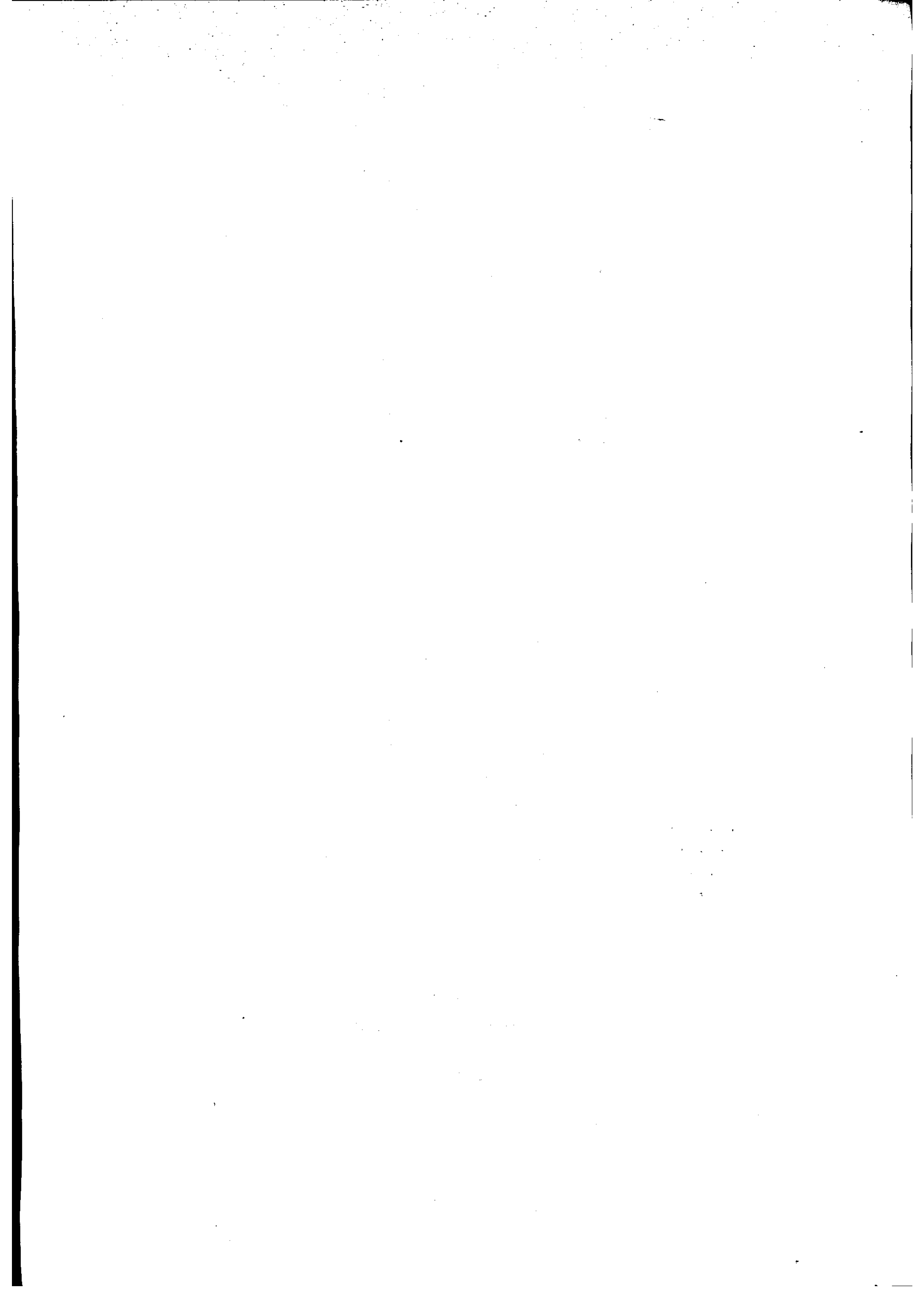
وكيل الكلية لشئون خدمة المجتمع وتنمية البيئة

كلية التجارة - جامعة الزقازيق

الناشر

المكتبة العلمية - الزقازيق

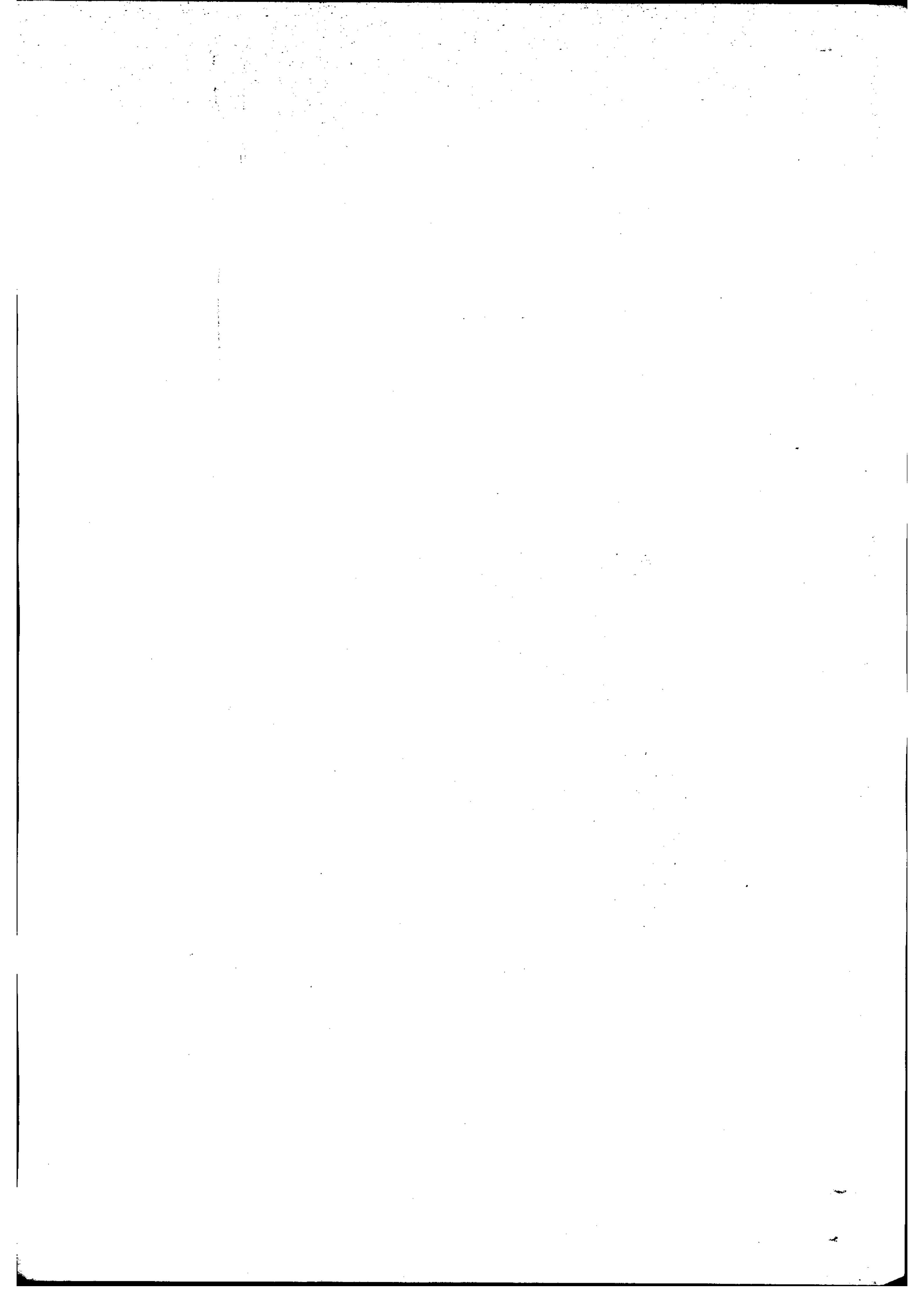
٢٠٠٥- ٢٠٠٦



بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

صدق الله العظيم

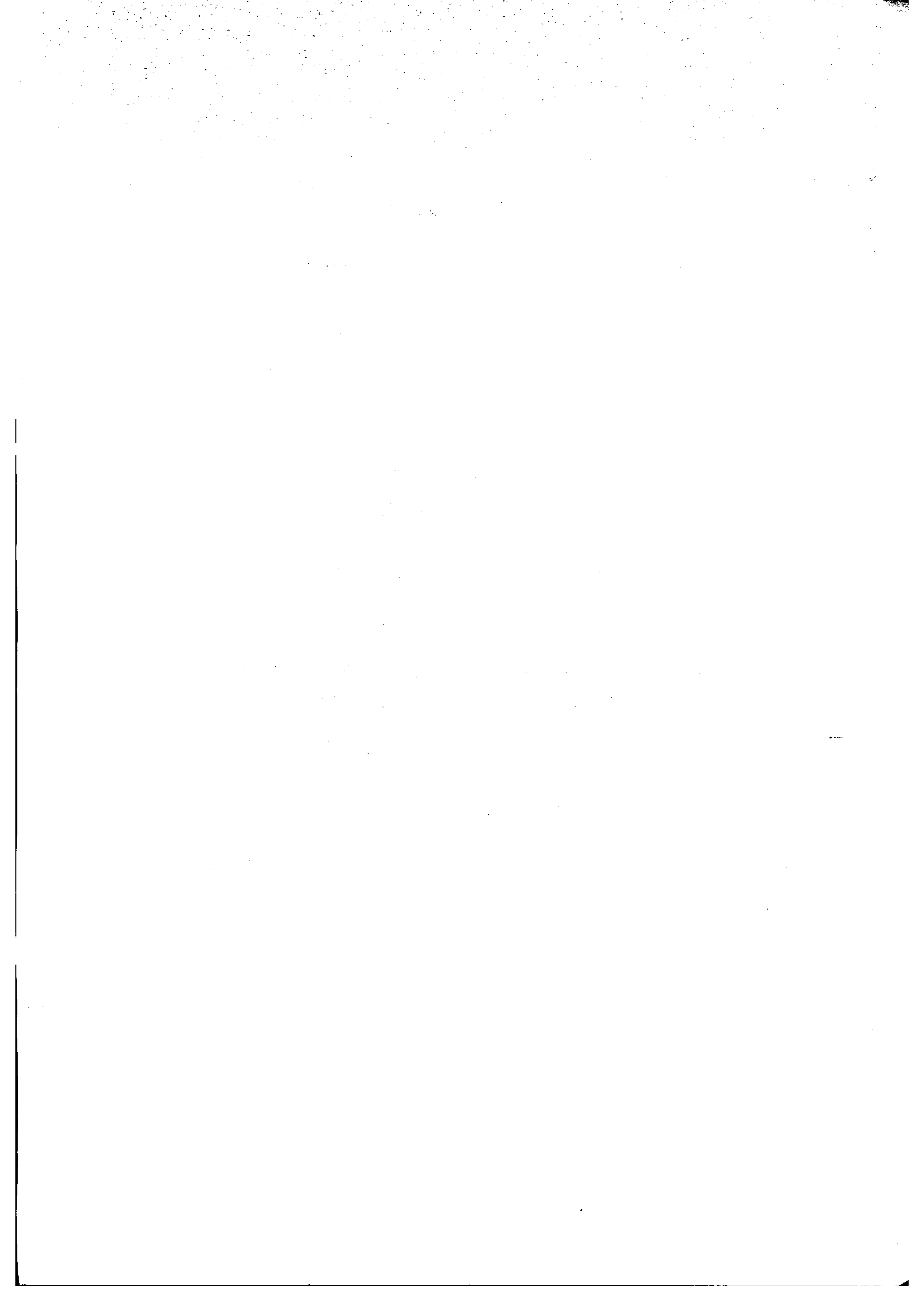


الباب الأول

البرمجة الخطية

الصياغة والحل وتحليل الحساسية

Linear Programming :
Formulation, Solution and Sensitivity Analysis



فهرس الكتاب

الصفحة

مقدمة

تعد بحوث العمليات إحدى الأساليب العلمية الهامة التي تساعد الإدارة في اتخاذ القرارات بالدقة والموضوعية اللازمين · ولعل السبب في تسميتها بهذا الأسم يرجع إلى العمليات الحربية التي كانت أولى المجالات التي استخدمت فيها ، فخلال الحرب العالمية الثانية كلفت وزارة الدفاع البريطانية فريقاً من علمائها من تخصصات مختلفة لدراسة المشاكل التكتيكية والإستراتيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي ، ولقد تمكن الفريق – اعتماداً على بعض النظريات الرياضية والإحصائية – من الاستخدام والتوزيع الأمثل للموارد المحدودة من رجال ومعدات الجيش البريطاني ، مما كان له عظيم الأثر من صد الهجوم الألماني وتحويل بريطانيا من موقف الدفاع إلى موقف الهجوم عام ١٩٤٢ · هذه النتائج الباهرة التي حققها هذا الفريق شجعت إدارة الحرب الأمريكية على القيام بدراسات وأنشطة مماثلة وإن كانت التطبيقات قد مست مجالات أوسع من تلك التي تمت في بريطانيا مثل اختراع أنماط طيران جديدة وتخطيط الغام البحر والاستخدام الفعال للتجهيزات الإلكترونية ·

وبعد إنتهاء الحرب العالمية الثانية فإن النجاح الكبير الذي تحقق في مجال الحرب نتيجة تطبيق علم " بحوث العمليات " جذب انتباه رجال الإدارة والاقتصاد والهندسة نحو هذا الحقل الجديد من المعرفة ، وتعدى ذلك بريطانيا وأمريكا ليشمل معظم دول العالم سواء المتقدمة منها أو النامية ، حيث تم إنشاء مراكز بحثية متخصصة وإصدار العديد من مجلات بحوث العمليات وذلك من أجل إيجاد الحلول المثلى للمشكلات التي تواجه منظمات الأعمال بتلك الدول في شتى المجالات مثل

الإنتاج والتخزين والتمويل والتسويق والنقل وتقييم السياسات البديلة للتشغيل والاستثمار ٠

ولقد شهدت السنوات الأخيرة تطوراً هائلاً في أساليب بحوث العمليات وذلك بسبب التسهيلات التي أحدثها التطور الهائل والموازي في علم الحاسب الآلي وخاصة تطور طاقاته الهائلة في السرعة الحسابية وفي تخزين واسترجاع المعلومات وهو ما يطلق عليه " ثورة الحاسبات " ٠ كما اتسعت مجالات تطبيق بحوث العمليات ولم تعد قاصرة على العمليات الحربية والصناعية بل اتسعت كثيراً لتساهم في إيجاد الحلول المثلى ودعم اتخاذ القرارات الصحيحة في مجالات الصحة والتعليم والسكان والمؤسسات المالية والمكتبات وحتى في مجالات السياسة والقانون وكشف الجرائم ٠

ويهدف هذا الكتاب إلى مد الدارسين أو الباحثين أو المديرين ببعض أساليب ونماذج بحوث العمليات مع التركيز على التطبيقات الاقتصادية الخاصة بهذه الأساليب ، إذ لا جدوى من تقديم أي أسلوب أو نموذج نظري إذا لم يقترن بتطبيق في الحياة العملية ، وذلك بهدف تخريج جيلاً جديداً من الدارسين والممارسين الذين يستطيعون استخدام الأساليب الكمية الحديثة وتكنولوجيا المعلومات وأيضاً بهدف تأصيل توجه الجامعة وكلياتها ومعاهدها المختلفة لخدمة المجتمع وحل ما يعترضه من مشاكل باستخدام الأساليب العلمية الحديثة خصوصاً وأن بيئة الأعمال تتسم الآن بالديناميكية والتغير السريع والمتلاحق ٠

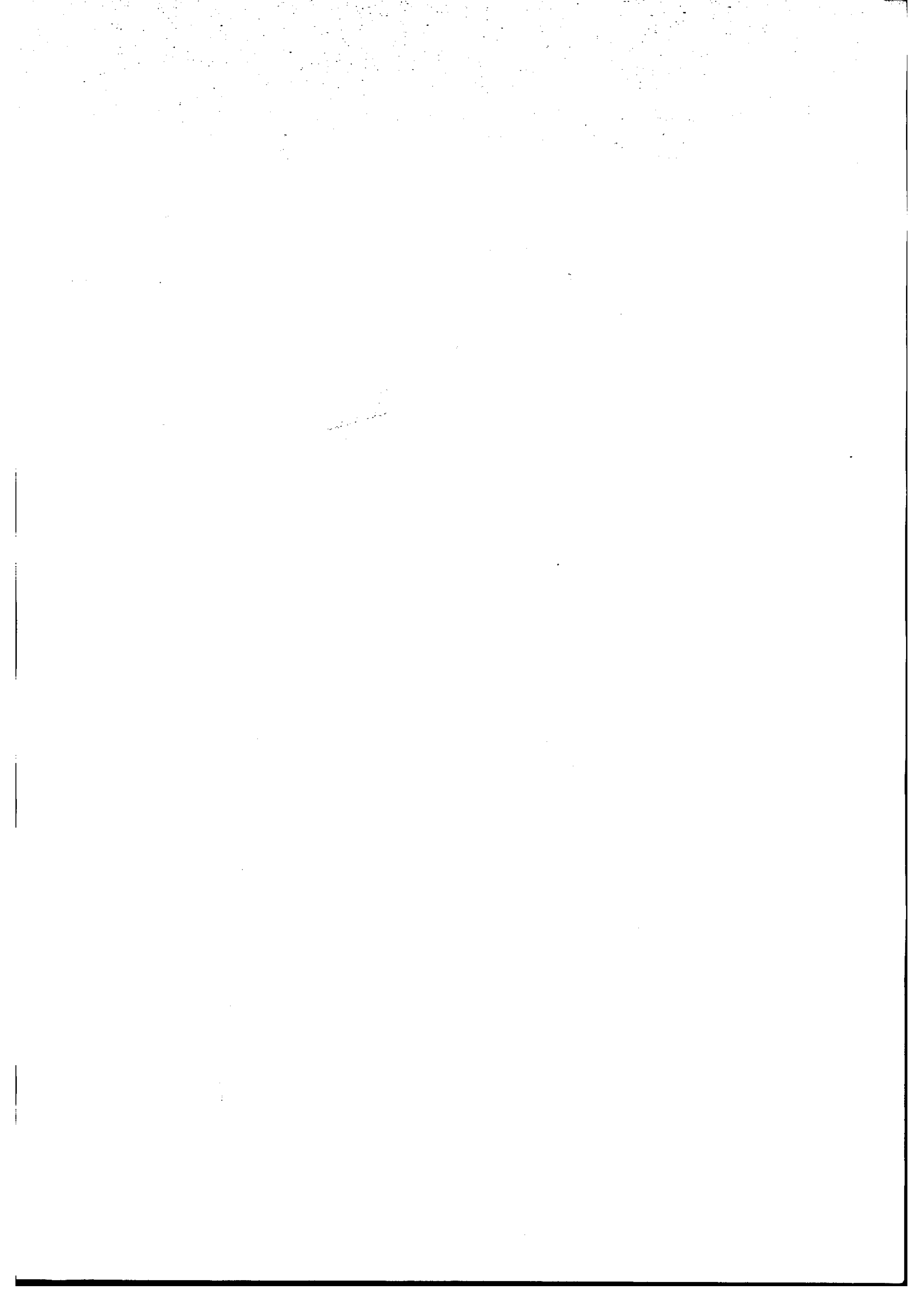
ولقد راعيت في هذا العرض السلاسة في الأسلوب والوضوح في طرح الأفكار والبعد – بقدر الإمكان – عن الاشتقاقات والإثباتات الرياضية التفصيلية ، والإكثار من الأمثلة التطبيقية المتنوعة والمحلولة والتي لا تعتبر تكراراً مملاً للفكرة

نفسها ، وهذا من شأنه يساعد في فهم واستيعاب المادة العلمية واتساع دائرة الاستفادة لكل الشرائح من الدارسين والممارسين الذين يستخدمون هذا الكتاب .

ويضم الكتاب ستة أبواب ، حيث يتضمن الباب الأول أسلوب البرمجة الخطية من حيث صياغة مشاكل البرمجة الخطية والحل البياني والحل الرياضي (المعروف باسم طريقة السمبلكس) لتلك المشاكل ، واشتقاق نموذج المبدول ثم تحليل الحساسية لنموذج البرمجة الخطية ، أما الباب الثاني فيتضمن برمجة الأعداد الخطية الصحيحة وحل البرنامج باستخدام طريقة التفريع والتحديد ، ويتضمن الباب الثالث صياغة وحل نماذج النقل بالإضافة إلى صياغة وحل نماذج التخصيص ، أما الباب الرابع فيشمل نظرية المباريات ذات المجموع الصفري والتي تفيد في تحديد الإستراتيجيات المثلى في ظل الأوضاع التنافسية في حالتي الإستراتيجيات البسيطة والإستراتيجيات المختلطة ، ويتضمن الباب الخامس تحليل الشبكات والتى تضم شبكات الاعمال (شبكات المسار الحرج وبيرت) ومشكلة أقصر طريق بالشبكة ومشكلة أقصى كمية تدفق خلال الشبكة ، أما الباب السادس فيتضمن عرض لنظرية صفوف الانتظار من حيث عناصرها وبعض نماذجها بالإضافة إلى تحليل التكاليف لصفوف الانتظار .

وأدعو الله العلي القدير أن أكون قد وفقت في عرض موضوعات هذا الكتاب ، والله من وراء القصد وهو الهادي إلى سواء السبيل .

المؤلف



الباب الأول

البرمجة الخطية

- مقدمة
- مجالات استخدام البرمجة الخطية
- صياغة مشاكل البرمجة الخطية
- حل نماذج البرمجة الخطية
  - الحل البيانى لنموذج البرمجة الخطية
  - الحل الرياضى لنموذج البرمجة الخطية [طريقة السمبلكس]
- مبدول نموذج البرمجة الخطية
- تحليل الحساسية
  - التغير فى معاملات دالة الهدف
  - التغير فى ثوابت القيود الهيكلية
  - التغير فى معاملات القيود الهيكلية
  - إضافة قيد هيكلى جديد
  - إضافة متغير جديد

(١ – ١) مقدمة :

تعتبر مشكلة توزيع الموارد المحدودة بين الاستخدامات المتعددة البديلة من أبرز وأهم المشاكل التى تواجه الإدارة أو متخذى القرار فى حياتنا العملية .

فمثلاً ، عند إجراء العملية الإنتاجية فإن المشكلة التى تواجه المديرين هى كيفية توزيع عوامل الإنتاج المتاحة (والمحدودة) على المنتجات المقرر إنتاجها بغرض تحقيق أكبر قدر من الأرباح أو تخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن أو زيادة عدد الوحدات المنتجة أو تحسين جودة المنتج أو أى مقاييس أخرى للكفاية وذلك فى ضوء مجموعة من القيود . هذه القيود قد ترجع إلى ظروف الإنتاج أو التشغيل أو المواد الخام أو التخزين أو التسويق أو النقل أو نوعية الموارد البشرية وغيرها من القيود التى يجب أن يتم تحقيق الهدف فى ضوئها .

والبرمجة الرياضية كأسلوب من أساليب بحوث العمليات تلعب دوراً كبيراً فى حل مثل تلك المشاكل ، فهى طريقة رياضية لتخصيص مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد بطريقة تحقق الوضع الأفضل والأكثر ملائمة بالنسبة للمشكلة أو الهدف المدروس .

وأى برنامج رياضى يشمل بصفة عامة ، العناصر الأتية :

١ – المتغيرات القرارية :

هى تلك المتغيرات التى يمكن اتخاذ قرارات بشأنها ، ويفترض أن أصغر قيمة لكل متغير من هذه المتغيرات هى الصفر ، ويعبر عنها فى الصورة : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، حيث n تمثل عدد المتغيرات القرارية فى النموذج .

٢ – دالة الهدف :

هى دالة رياضية تعتمد على المتغيرات القرارية ، وعادة تتضمن هذه الدالة هدف معين مطلوب تحقيقه مثل تعظيم الربح لأقصى حد ممكن أو تخفيض التكاليف لأدنى حد ممكن أو رفع كفاءة النظام القائم إلى أقصى درجة ممكنة. وتعتبر دالة الهدف المؤشر الوحيد لبلوغ الحل الأمثل .

٣ – القيود الهيكلية :

هى مجموعة من العلاقات الرياضية التى تعتمد على كل من المتغيرات القرارية والعلاقات الفنية بين مكونات النظام ؛ إذ لابد من وجود قيود ثابتة وحدود للموارد والإمكانيات ، ولولا وجود هذه القيود والحدود الثابتة لما كانت هناك مشكلة . ويعبر عن هذه القيود الهيكلية فى صورة مجموعة من المعادلات أو المتباينات الرياضية تأخذ صورة = أو ≤ أو ≥ .

٤ – قيد عدم السلبية :-

ويعنى هذا القيد أن جميع المتغيرات القرارية الداخلة فى دالة الهدف والقيود الهيكلية تساوى فقط 0 أو قيمة موجبة ، وهذا شرط أساسى وطبيعى فى معظم نظم الحياة الواقعية ، ويعبر عن هذا القيد كالآتى :

$$x_i \geq 0 \quad \text{حيث} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

حيث n ، كما سبق ، تمثل عدد المتغيرات القرارية فى النموذج .

والبرمجة الخطية هى أحد أنواع البرمجة الرياضية وفيها تكون :

١ – دالة الهدف ويرمز لها بالرمز $Z(x)$ ، وسوف تكتب بعد ذلك Z على سبيل الاختصار ، دالة خطّية (أى دالة من الدرجة الأولى) ,

٢ – القيود الهيكلية على شكل معادلات أو متباينات خطية أيضاً .

وتعتبر العلاقة خطية بين ظاهرتين إذا كان تغير قيمة الظاهرة الأولى بوحدة واحدة يؤدى إلى تغير قيمة الظاهرة الثانية بمقدار (أو بنسبة) ثابت (ثابتة) .

(١ – ٢) مجالات استخدام البرمجة الخطية

اقترنت التطويرات النظرية للبرمجة الخطية بحل عدد كبير من التطبيقات العملية فى مجالات المعرفة المختلفة ولاسيما فى مجال الإدارة والإقتصاد والوصول فيها إلى القرارات المثلى ، ونعرض فيما يلى – على سبيل المثال لا الحصر – بعض التطبيقات الهامة :

١ – تخطيط الإنتاج :

حيث تكون المشكلة فى اختيار عدد معين من الوحدات الواجب إنتاجها من بين بدائل عديدة مع الأخذ فى الإعتبار طاقات الإنتاج ومستلزماته المتاحة واحتياجات كل منتج من هذه الطاقات والمستلزمات ، مع تحقيق أقصى ربح ممكن أو أدنى تكاليف ممكنة .

٢ – توزيع الاستثمارات :

حيث تكون المشكلة فى تحديد أنسب أنواع الإستثمار من بين البدائل المختلفة المتاحة وتوزيع الموارد المتاحة بين هذه الإستثمارات بحيث يكون العائد من عملية الإستثمار أكبر ما يمكن .

٣ – النقل :

تتركز المشكلة فى كيفية نقل المواد الخام أو المنتجات أو الأفراد من مصادر بها عروض (مثل المخازن أو المناجم أو المزارع) إلى جهات استخدام لها طلبات (مثل المصانع أو مراكز التسويق والاستهلاك) بحيث يتم اختيار مسارات النقل التى تحقق أعلى كفاءة توزيعية تواجه كل الطلبات بأكبر أرباح (أو بأقل تكاليف نقل) ممكنة .

٤ – التخصيص :

يكون الهدف فى هذه الحالة هو كيفية تخصيص أو توزيع الموارد كالأفراد أو المركبات أو الأجهزة إلى جهات الاستخدام

المختلفة بحيث يتحقق أكبر عائد ممكن أو أعلى كفاءة تشغيل ممكنة أو أقل فاقد ممكن .

٥ – توزيع ميزانية الإعلان :

حيث يكون الهدف هو كيفية توزيع ميزانية الإعلان المحدودة بين وسائل الإعلان المختلفة من صحافة ومجلات وإذاعة وتليفزيون ... الخ ، بحيث تكون فعالية الإعلان مرتفعة إلى أقصى حد ويصل الإعلان إلى أكبر عدد ممكن من القراء والمشاهدين .

(١ – ٣) صياغة مشاكل البرمجة الخطية

سوف نقدم الأمثلة الآتية لكلى نتبين كيفية صياغة المشكلة حتى يمكن استخدام البرمجة الخطية لحلها .

أ – مشكلة الإنتاج :

تقوم شركة فيليبس بالتخطيط لإنتاج نوعين جديدين من جهازى التليفزيون والفيديو ، وتواجه إدارة التخطيط مشكلة تحديد كمية الإنتاج من كل من هذين المنتجين فى ضوء البيانات التالية :

١ – يحتاج إنتاج التليفزيون الواحد إلى 3 ساعات عمل فنى ، 9 وحدات من المواد الخام ، أما إنتاج الفيديو الواحد فيحتاج إلى 5 ساعات عمل فنى ، 6 وحدات من المواد الخام .

٢ – الحد الأقصى لساعات العمالة الفنية فى الشركة عبارة عن 300 ساعة يومياً ، والمواد الخام المتاحة 720 وحدة يومياً .

٣ – عدد الوحدات الممكن توزيعها من أجهزة الفيديو لا تتجاوز 50 جهازا يوميا ، بينما تستطيع الشركة بيع أية كميات منتجة من التليفزيونات .

٤ – بيع التليفزيون الواحد يحقق ربحا قدره 400 جنيه ، بينما الربح المتحقق للشركة من بيع جهاز الفيديو قدره 600 جنيه .

المطلوب صياغة المشكلة في الشكل النمطي لنموذج البرمجة الخطية .

الحـــل :

لكى تصاغ هذه المشكلة فى صورة نموذج خطى نلاحظ ما يلى :

١ – المتغيرات القرارية الواجب تحديدها هى عدد الوحدات الواجب إنتاجها من التليفزيون ، x_1 ، ومن أجهزة الفيديو ، x_2 .

٢ – دالة الهدف : حيث أن إنتاج الوحدة الواحدة من أجهزة التليفزيون يحقق ربحا قدره 400 جنيه ، والوحدة الواحدة من أجهزة الفيديو يحقق ربحا قدره 600 جنيه فيكون الربح الإجمالى المتحقق هو :

$$400\,x_1 + 600\,x_2$$

ويكون الهدف هو تعظيم الدالة

$$Z = 400\,x_1 + 600\,x_2$$

٣ – القيود الهيكلية : بخصوص قيد العمالة الفنية ، نجد أن إنتاج التليفزيون الواحد يحتاج إلى 3 ساعات عمالة فنية ، وإنتاج

جهاز الفيديو الواحد يحتاج إلى 5 ساعات عمالة فنية ، وحيث أن العمالة الفنية المستخدمة ينبغي ألا يتجاوز المتاح منها وهو 300 ساعة عمل فني ، فيكون قيد العمالة الفنية هو :

$$3x_1 + 5x_2 \leq 300$$

بخصوص قيد المواد الخام ، فبالمثل ، نجد أن إنتاج جهاز التليفزيون يتطلب استخدام 9 وحدات من المواد الخام ، وإنتاج جهاز الفيديو يتطلب استخدام 6 وحدات من المواد الخام ، والمستخدم من المواد الخام ينبغي ألا يتجاوز المتاح منها وهو 720 وحدة ، فيصاغ القيد كالآتي :

$$9x_1 + 6x_2 \leq 720$$

٤ – حيث أنه لا يمكن توزيع أكثر من 50 جهاز فيديو يومياً ، لذلك فإن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من أجهزة الفيديو يجب ألا يزيد عن 50 جهاز في اليوم ، ويعبر عن هذا القيد في الصورة

$$x_2 \leq 50$$

٥ – قيد عدم السلبية : ويعني أن المتغيرات القرارية يجب أن تكون كميات غير سالبة ، ويعبر عن ذلك في الصورة :

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2)$$

وعلى ذلك يمكن صياغة المشكلة السابقة على النحو التالي :

المطلوب إيجاد قيم $(i = 1, 2)$ ، x_i التي تحقق الحد الأقصى للدالة :

$$\text{Maximize } Z = 400\ x_1 + 600\ x_2$$

بشـوط أن :

$$3x_1 + 5x_2 \le 300$$

$$9x_1 + 6x_2 \le 720$$

$$x_2 \le 50$$

$$x_i \ge 0, \qquad (i = 1, 2)$$

ب – مشكلة التغذيـة :

بفرض أن وزارة التربية والتعليـم بصـدد تكويـن وجبـة غذائيـة لتلاميذ المرحلة الابتدائية ، على أن تتكـون الوجبـة الواحـدة مـن الخـبز والبيض والجبـن والفاكهـة لتحتـوى علـى البروتينـات والكربوهيـدرات والفيتامينات ، وتقتضى الضرورة الصحية أن تحتـوى الوجبـة علـى 60 ملليجرام على الأقـل مـن البروتينـات ، بينمـا وحـدات الكربوهيـدرات لاتزيد عن 40 ملليجرام ولا تقـل عـن 20 ملليجـرام ، أمـا بالنسـبة للفيتامينات فيجب ألا تقل عن 50 ملليجرام فـى الوجبـة الواحـدة .

ويحتوى رغيـف الخـبز علـى 5 , 10 , 2 ملليجـرام مـن البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات علـى الـترتيب ، بينمـا تحتـوى البيضة على 20 , 8 ملليجرام مـن البروتينـات والكربوهيـدرات علـى التوالى ، وتحتوى قطعـة الجبـن (50 جـرام) علـى 15 , 12 , 5 ملليجرام من البروتينات والكربوهيـدرات والفيتامينـات علـى الـترتيب ، وتحتوى الوحدة الواحدة من الفاكهة علـى 8 , 15 , 30 ملليجـرام مـن البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات علـى الـترتيب .

فإذا علمت أن ثمن رغيف الخبز 15 قرشاً ، وثمن البيضة الواحدة 40 قرشاً وثمن قطعة الجبن 60 قرشاً وثمن الوحدة الواحدة من الفاكهة فى المتوسط 50 قرشاً .

المطلوب صياغة المشكلة فى الشكل النمطى لنموذج البرمجة الخطية .

الحل :

لصياغة هذه المشكلة يمكن وضع بياناتها فى الجدول التالى :

	الخبز	البيض	الجبن	الفاكهة	الحدود الدنيا والعليا للعناصر الغذائية الواجب تحقيقها
البروتينات	5	20	15	8	60 ملليجرام كحُد أدنى
الكربوهيدرات	10	8	12	14	40 ملليجرام كحد أقصى، 20 ملليجرام كحد أدنى
الفيتامينات	2	--	5	30	50 ملليجرام كحد أدنى
ثمن شراء الوحدة	15	40	60	50	

المتغيرات القرارية هى :

الكمية الواجب تضمينها من الخبز فى الوجبة الواحدة هى X_1

الكمية الواجب تضمينها من البيض فى الوجبة الواحدة هى X_2

الكمية الواجب تضمينها من الجبن فى الوجبة الواحدة هى X_3

الكمية الواجب تضمينها من الفاكهة فى الوجبة الواحدة هى X_4

ويكون الهدف هو محاولة جعل تكلفة الوجبة الواحدة أصغر ما يمكن ، أى إيجاد النهاية الصغرى للدالة :

$$Z = 15x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 50x_4$$

وذلك فى ظل مجموعة القيود الهيكلية الآتية :

القيد الخاص بالبروتينات : حيث أن الكمية الواجب توافرها فى الوجبة الواحدة من البروتينات ينبغى ألا تقل عن 60 ملليجرام ، فيكون القيد كالآتى :

$$5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 8x_4 \geq 60$$

وبالمثل ، بخصوص الكربوهيدرات فيوجد قيدان : القيد الأول هو ألا تزيد كمية الكربوهيدرات عن 40 ملليجرام ويكون كالتالى :

$$10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 14x_4 \leq 40$$

بينما القيد الثانى هو ألا تقل كمية الكربوهيدرات عن 20 ملليجرام فى الصورة :

$$10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 14x_4 \geq 20$$

القيد الخاص بالفيتامينات : حيث أن الكمية الواجب توافرها فى الوجبة الواحدة من الفيتامينات ينبغى ألا تقل عن 50 ملليجرام ، فيكون القيد على الصورة :

$$2x_1 + 5x_3 + 30x_4 \geq 50$$

وأخيراً يأتى قيد عدم السلبية ، ويعنى أن الكميات الواجب استخدامها من الخبز والبيض والجبن والفاكهة فى الوجبة وهى : x_1 , x_2 , x_3 , x_4 يجب ألا تكون سالبة ، أى أن :

$$x_i \geq 0 , \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

وتكون الصيغة الرياضية للمشكلة السابقة على النحو التالى :

المطلوب إيجاد قيم x_i , $(i = 1, 2, 3, 4)$ التى تحقق الحد الأدنى للدالة ، أى :

$$\text{Minimize } Z = 15\,x_1 + 40\,x_2 + 60\,x_3 + 50\,x_4$$

بشرط أن :

$$5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 8x_4 \geq 60$$
$$10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 14x_4 \leq 40$$
$$10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 14x_4 \geq 20$$
$$2x_1 + 5x_3 + 30x_4 \geq 50$$
$$x_i \geq 0 , \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

جـ - مشكلة جدولة الطائرات :

تتألف خطوط إحدى شركات الطيران من 3 أنواع : قصيرة المدى ، متوسطة المدى ، وطويلة المدى . وتقوم الشركة باستئجار الطائرات المناسبة من أحد المصانع كل عام ، فإذا علمت أن الربح الذى تحققه الشركة فى العام من كل طائرة تعمل على هذه الخطوط الثلاثة تقدر كما يلى :

7 مليون دولار من الخطوط طويلـة المـدى .

5 مليون دولار من الخطوط متوسـطة المـدى .

2 مليون دولار من الخطوط قصـيرة المـدى .

ويعمل فى الشركة الكادر التـالى :

150 طيـار

100 مهنـدس

750 مضيف ومضيفـة

وتحتاج كل طائرة تعمل على الخطوط الثلاث إلى الكادر التالى :

الخطـوط / الكادر	طويلة المدى	متوسطة المدى	قصيرة المدى
عدد الطيارين	4	2	1
عدد المهندسين	1	4	2
عدد المضيفين و المضيفات	6	4	3

المطلوب صياغة المشكلة فى الشـكل النمطـى لنمـوذج البرمجـة الخطيـة .

الحـل :

المتغيرات القرارية هـى :

عدد الطائرات الواجب استئجارها فـى العـام مـن المصنـع لتعمـل على الخطوط طويلة المدى هـى : X_1

عدد الطائرات الواجب استئجارها فـــى العـــام مـــن المصنــع لتعمــل على الخطوط متوسطة المدى هـــى : x_2

عدد الطائرات الواجب استئجارها فـــى العـــام مـــن المصنــع لتعمــل على الخطوط قصيرة المدى هـــى : x_3

وتصاغ المشكلة على النحو التـــالى :

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

بشرط أن :

(قيد الطيــارين) : $4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 150$

(قيد المهندسين) : $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 100$

(قيد المضيفين والمضيفات): $4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 750$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

د – مشكلة تخصيص ميزانية الإعلان :

تخطط إحدى شركات الإعلانـــات لوضـــع برنـــامج للإعـــلان عـــن منتج جديد لأحد عملائـــها ، وأمـــام الشـــركة 3 وســـائل للإعـــلان عـــن المنتج هى : الصحف والمجـــلات ، والإذاعـــة ، والتليفزيـــون . والجـــدول التالى يوضح تكلفة الإعلان الواحد فـــى كـــل وســـيلة مـــن هـــذه الوســـائل وعدد الأشخاص (بـــالمليون) الذيـــن يصلـــهم الإعـــلان الواحـــد (تحـــت وفوق 25 عاما) شـــهريا :

	تكلفة الإعلان بالجنيه	عدد الأشخاص تحت 25 عاما	عدد الأشخاص فوق 25 عاما
الصحف والمجلات	1500	2	3
الإذاعة	1100	3	4
التليفزيون	3000	6	5

وتهدف الشركة إلى تحقيق الأهداف التالية :

١ – لا يقل عدد الأشخاص تحت 25 عاما الذين يصلهم الإعلان عن المنتج في الشهر عن 95 مليون شخص .

٢ – لا يزيد عدد الأشخاص فوق 25 عاما الذين يصلهم الإعلان عن المنتج في الشهر عن 60 مليون شخص .

٣ – عدد الأشخاص الذين يصلهم الإعلان عموما عن المنتج لا يقل عن 200 مليون شخص في الشهر .

٤ – تكلفة الإعلانات بالإذاعة والتليفزيون في الشهر يجب ألا تتجاوز 50000 جنيه في الشهر .

المطلوب : صياغة المشكلة في الشكل النمطي لنموذج البرمجة الخطية.

الحل :

المتغيرات القرارية هي :

عدد مرات الإعلان بالصحف والمجلات في الشهر هو : X_1

عدد مرات الإعلان بالإذاعة فى الشـــهر هــو : x_2

عدد مرات الإعلان بالتليفزيون فى الشـــهر هــو : x_3

وتصاغ المشكلة على النحو التـــالى :

$$Min\ Z = 1500\ x_1 + 1100\ x_2 + 3000\ x_3$$

بشــوط أن:

$$2\ x_1 + 3\ x_2 + 6\ x_3 \geq 95$$

$$3\ x_1 + 4\ x_2 + 5\ x_3 \geq 60$$

$$5\ x_1 + 7\ x_2 + 11\ x_3 \geq 200$$

$$1100\ x_2 + 3000\ x_3 \leq 50000$$

$$x_i \geq 0\ , \qquad (i = 1, 2, 3).$$

وبصفة عامة ، فإن الصيغة العامة لنموذج البرمجـــة الخطيـــة يمكـــن التعبير عنها كما يلـــى :

إذا كان x_i يشير إلى الكمية الواجب تحديدها مـــن المتغـــير (i)

وإذا كان t_i هو ربح (أو تكلفة) الوحدة من المتغير (i)

وإذا كان a_{ij} هو المعامل الفنى للمتغير (i) مـــن القيـــد (j)

وإذا كان n هو عدد المتغيرات القرارية ، أى أن : $i = 1,2, \dots , n$

وإذا كان m هو عدد القيود الهيكلية ، أى أن : $j = 1,2, \dots , m$

وإذا كان c_j هى الكمية المطلقة للقيد (j)

فإن المطلوب هو :

إيجاد الكميات $x_1, x_2, \dots, x_n$ التى تحقق الحد الأقصى (أو الأدنى) للدالة:

$$Z = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$$

بشرط أن :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq (\text{أو} \geq \text{أو} =) \ c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq (\text{أو} \geq \text{أو} =) \ c_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq (\text{أو} \geq \text{أو} =) \ c_m$$

$$x_i \geq 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

ويمكن كتابة النموذج السابق على الصورة المختصرة الآتية :

المطلوب تحديد الكميات x_i $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ التى تحقق الحد الأقصى (أو الأدنى) للدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

بشروط أن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq (\text{أو} \geq \text{أو} =) \ c_j \qquad (j = 1,2, \dots, m)$$

$$x_i \geq 0, \qquad (i = 1,2, \dots, n)$$

(١-٤) حل نماذج البرمجة الخطية

بعد أن تعرضنا فى الجزء السابق لمجالات استخدام أسلوب البرمجة الخطية وكيفية صياغة المشاكل التطبيقية فى صورة نماذج رياضية فإننا نحاول الآن حل النموذج ، أى تحديد ما هى القيم التى ستأخذها المتغيرات القرارية ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) والتى تحقق كلا من القيود الهيكلية وقيد عدم السلبية وتجعل دالة الهدف (Z) أكبر (أو أصغر) ما يمكن .

يجب فى البداية أن نفرق بين نوعين من الحلول لنموذج البرمجة الخطية وهما :

أ – الحل الأساسى المسموح به (أو الحل الممكن) وهو الحل الذى يحقق كافة القيود الهيكلية وقيد عدم السلبية .

ب – الحل الأمثل وهو ذلك الحل الأساسى المسموح به والذى يجعل دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن .

ويوجد طريقتان أساسيتان لحل نموذج البرمجة الخطية هما :

١ – الحل البيانى .

٢ – الحل الرياضى والمعروف باسم طريقة السمبلكس .

١ – الحل البيانى لنماذج البرمجة الخطية

يمكن إيجاد حل تقريبى لنماذج البرمجة الخطية باستخدام التمثيل البيانى للدوال ، ويعاب على الطريقة البيانية التى سوف

نعرضها أنه لا يمكن استخدامها إلا إذا كان النموذج الخطى يتضمن أثنين أو ثلاثة فقط من المتغيرات القرارية حيث يصعب تمثيل أكثر من 3 أبعاد على رسم بيانى ، فإذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة فلا يمكن استخدام الطريقة البيانية ويتحتم حينئذ استخدام الطريقة الرياضية العامة ، ولعل هذا هو السبب فى محدودية استخدام الأسلوب البيانى فى حل التطبيقات العملية ، إلا أن الأسلوب البياني يتميز بالسهولة والوضوح مما يساعد على التعرف على الأنواع المختلفة من الحلول لنماذج البرمجة الخطية .

وتقوم الطريقة البيانية فى حل نماذج البرمجة الخطية على أساس تمثيل القيود المختلفة على شكل خطوط مستقيمة ويتم ذلك كالآتى :

أ – تحول المتباينات إلى معادلات رياضية .

ب – يتم رسم المعادلات الرياضية بخطوط مستقيمة ، وينبغى ملاحظة أن الخط المستقيم يمكن تحديده تماما بمعرفة أى نقطتين تقعان عليه .

فإذا كان القيد على شكل معادلة فإن الحل الذى يستوفى هذا القيد ينبغى أن يقع على نفس الخط المستقيم تماما ، أما إذا كان القيد على شكل متباينة فى الصورة أصغر من أو يساوى (أى $\leq$) فإن الحل الممكن ينبغى أن يقع تحت الخط المستقيم الممثل للقيد ، وإذا كانت المتباينة على الصورة أكبر من أو يساوى (أى $\geq$) فإن الحل الممكن ينبغى أن يقع فوق الخط المستقيم الممثل للقيد .

وتكون المساحة المشتركة التى تحقـــق جميـــع المتباينـــات (القيـــود الهيكلية وقيد عدم السلبية) فى نفس الوقت هـــى منطقـــة الحلـــول الممكنـــة والتى ينبغى أن يقع داخلها أو على حدودها الحـــل الأمثـــل .

ولتحديد الحل الأمثل بعد ذلك يلاحـــظ أن منطقـــة الحلـــول الممكنـــة والتى تم تحديدها تحتوى على عدد لانهائى مـــن النقـــاط الممكنـــة ، ولكـــن وجد أن النقاط الطرفيـــة (أى التـــى تقـــع علـــى حـــدود منطقـــة الحلـــول الممكنة) ستكون متضمنة دائما الحـــل الأمثـــل .

وبتحديد هـــذه النقـــاط الطرفيـــة (أو الأركـــان) لمنطقـــة الحلـــول الممكنة على الرسم نعوض بـــها فـــى دالـــة الـــهدف ونختـــار النقطـــة ذات القيمة الأفضل . فإذا كانت دالـــة الـــهدف تعنـــى تحقيـــق أقصـــى ربـــح ، نختار النقطة التى تحقق أكبر قيمـــة لدالـــة الـــهدف . أمـــا إذا كـــانت دالـــة الهدف تعنى تحقق أقل تكلفة ممكنة ، نختار النقطة التى تحقـــق أقـــل قيمـــة ممكنة لدالة الهدف . وهذه النقطة تمثـــل الحـــل الأمثـــل أو عـــدد الوحـــدات الواجب اختيارها مـــن المتغـــير الأول ، X_1 ، وعـــدد الوحـــدات الواجـــب اختيارها من المتغير الثـــانى ، X_2 .

ولبيان كيفية اســـتخدام الطريقـــة البيانيـــة لحـــل نمـــاذج البرمجـــة الخطية نقدم الأمثلة التاليـــة :

مثـال (١) :

المطلوب إيجاد الحل البيانى للنمــوذج الآتــى :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 10x_2$$

بشرط أن :

$$7x_1 + 6x_2 \le 84$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 40$$
$$x_1 \le 10$$
$$x_i \ge 0 , \quad (i = 1, 2) .$$

الحــل :

ســوف نعتــبر أن الإحداثــى الســينى يمثــل المتغــير الأول x_1 ، والإحداثى الصادى يمثل المتغير الثــانى x_2 ، وعليــه فــإن جميــع النقــط التــى تقع فى الربع الأول (الموجــب) تحقق قيــد عــدم الســلبية وهــو : $x_1 \ge 0$ ، $x_2 \ge 0$. بعــد ذلــك نقــوم بعمليــة التمثيــل البيــانى للقيــود الهيكلية ، وذلك بتحويل المتباينات إلى معــادلات ، وبعــد رســم المعادلــة بخط مستقيم نحدد فى أى جهة من هذا الخط يكــون الحــل ممكنــاً .

بالنسبة للقيد الأول : يتم تحويله إلى معادلة ليصبــح كمــا يلــى:

$$7x_1 + 6x_2 = 84$$

بفرض أن قيمــة $x_1 = 0$ فتكون قيمة x_2 هى : $x_2 = 84 \div 6 = 14$

ثم بفرض أن قيمة $x_2 = 0$ فتكون قيمة x_1 هى : $x_1 = 84 \div 7 = 12$

وتكون النقطتان اللتان يمكن بهما رسم الخــط المســتقيم الــذى يمثــل هذه المعادلة هما : $(14 , 0)$, $(12, 0)$

بالنسبة للقيد الثانى : يتم تحويله إلى معادلة كمــا يلــى :

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$

عندما تكـــون $x_1 = 0$ فتكون قيمة x_2 هى : $x_2 = 40 \div 4 = 10$

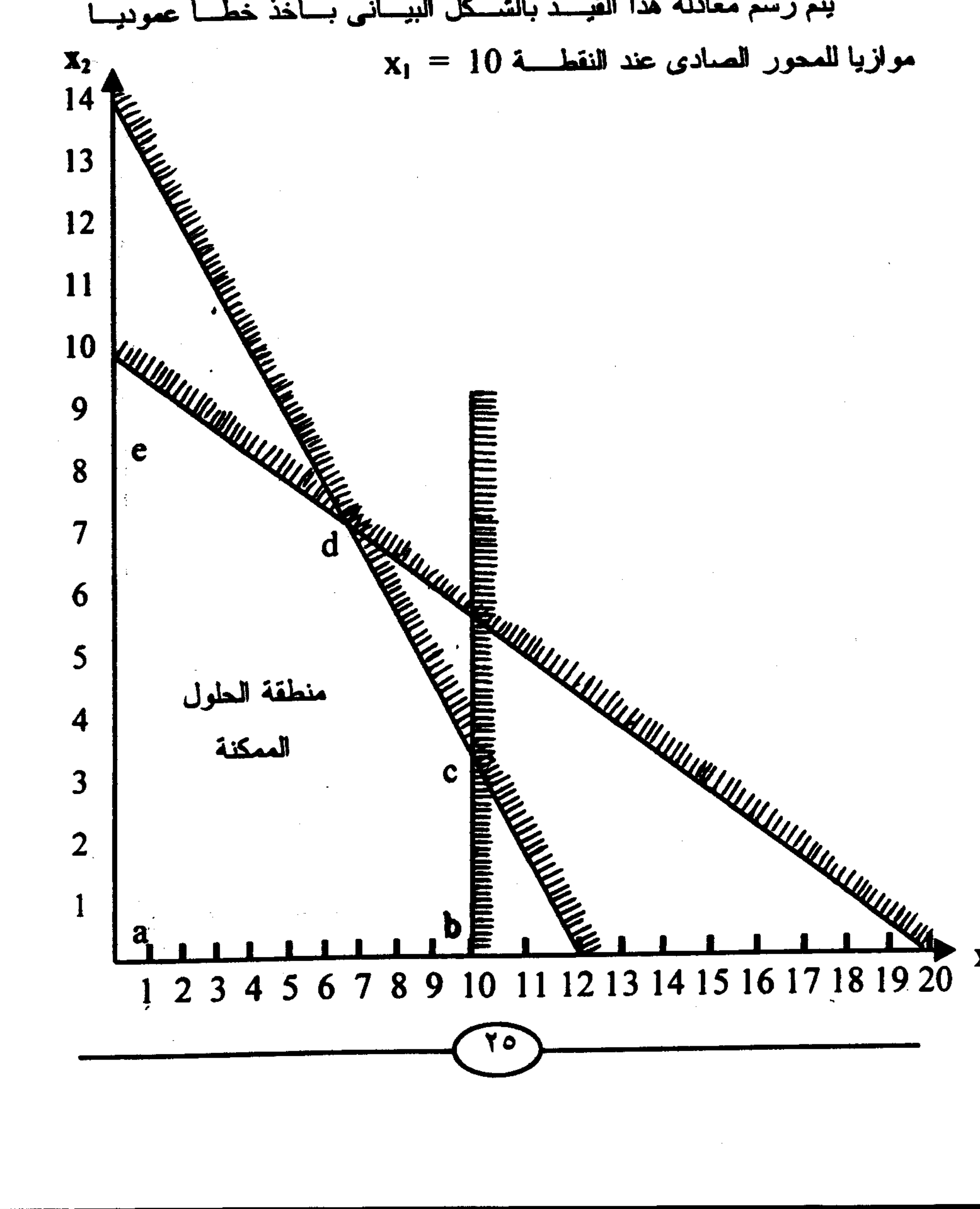
، عندما تكـــون $x_2 = 0$ فتكون قيمة x_1 هى : $x_1 = 40 \div 2 = 20$

وتكون النقطتان اللتان نرسم بـــهما هـــذا الخـــط المســتقيم الـــذى يمثل هذه المعادلة هما : $(0 , 10)$, $(20 , 0)$

بالنسبة للقيد الثالث : يتم تحويله إلى معادلة فيصبـــح كمـــا يلـــى :

$$x_1 = 10$$

يتم رسم معادلة هذا القيـــد بالشـــكل البيـــانى بـــأخذ خطـــاً عمودياً موازيا للمحور الصادى عند النقطـــة $x_1 = 10$



وتكون منطقة الحلول الممكنة هـــى المنطقـــة e d c b a وهـــى تضم عدداً لا نهائياً من الحلول التـــى تحقـــق كافـــة القيـــود وتعتـــبر كلـــها حلولاً ممكنة ، أما الحل الأمثل فيكـــون ، كمـــا ســـبق أن أوضحنـــا ، هـــو إحدى النقاط الطرفية القصـــوى أى b أو c أو d أو e مـــع ملاحظـــة أن تستبعد النقطة a (نقطة الأصل) فـــى جميـــع الحـــالات لأن هـــذه النقطـــة تعنى أن قيمة $x_1 = 0$ ، قيمة $x_2 = 0$ وقيمـــة دالـــة الـــهدف $Z = 0$ أيضا ، أى أن العملية لم تبدأ بعـــد .

ولا يجاد النقطة التى تمثل الحل الأمثـــل ، أى التـــى تجعـــل الدالـــة $Z = 6x_1 + 10x_2$ أكبر ما يمكن ، تحســـب قيمـــة دالـــة الـــهدف عنـــد كل نقطة من هذه النقاط الطرفية كما يتضح مـــن الجـــدول الآتـــى :

النقطة	(x_1, x_2)	دالة الهدف : $Z = 6x_1 + 10x_2$
b	(10 , 0)	6 (10) + 10 (0) = 60
c	(10 , 2.4)	6 (10) + 10 (2.4) = 84
d	(6 , 7)	6 (6) + 10 (7) = 106
e	(0 , 10)	6 (0) + 10 (10) = 100

وحيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف ، فإن النقطة التى تمثل الحل الأمثـــل هـــى النقطة التى تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف ، Z ، وهى النقطـــة d . وعند هذه النقطة نجد أن $x_1^* = 6$ ، $x_2^* = 7$ ، كما أن قيمة دالـــة الهدف عند هذه النقطة تساوى 106 ، وهى أقصى قيمة يمكن أن تصل إليـــها دالة الهدف فى ظل مجموعة القيود الموضوعة .

مثـال (٢) :

أوجد بيانياً قيم x_2 , x_1 التى تحقق البرنـــامج التـــالى :

$$Min\ Z = 2x_1 + 4x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$
$$2x_1 + 6x_2 \geq 24$$
$$x_1 + x_2 \geq 9$$
$$x_i \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2)$$

الحـــل :

نحول المتباينات إلى معادلات ثم نرسم كـــل معادلـــة بخــط مســتقيم بعد تحديد نقطتين عليـــه .

القيد الأول : $2x_1 + x_2 = 12$

عندما $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 12$

وعندما $x_2 = 0$ فإن $x_1 = 6$

وتكون النقطتان هما : $(0 , 12)$ ، $(6 , 0)$

القيد الثانى : $2x_1 + 6x_2 = 24$

عندما $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 4$

وعندما $x_2 = 0$ فإن $x_1 = 12$

وتكون النقطتان هما : $(0 , 4)$, $(12 , 0)$

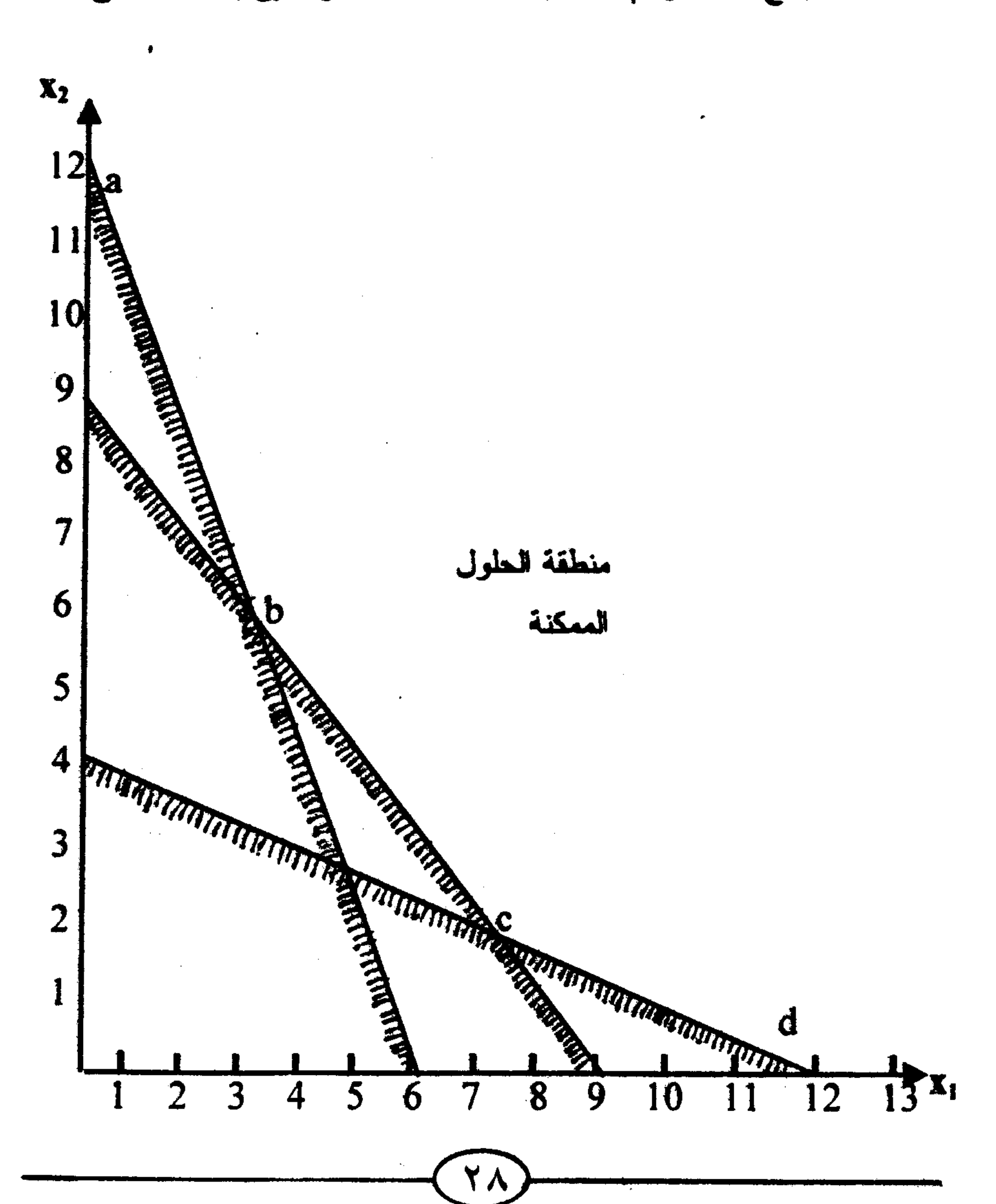
القيد الثالث : $x_1 + x_2 = 9$

عندما $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 9$

وعندما $x_2 = 0$ فإن $x_1 = 9$

وتكون النقطتان هما : $(0,9)$, $(9,0)$

ولتمثيل النموذج بيانياً نرسم المستقيمات السابقة كما هو مبين بالشكل التالى :



ويلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هى a b c d إلى أعلى وتضم عدداً لا نهائياً من الحلول الممكنة ، إلا أن الحل الأمثل الذى يحقق الحد الأدنى لدالة الهدف سيكون هو إحدى النقاط الطرفية a أو b أو c أو d كما سبق أن أوضحنا .

ولإيجاد نقطة الحل الأمثل نعوض بكل نقطة من هذه النقاط فى دالة الهدف كما يتضح من الجدول الآتى :

النقطة	(x_1 , x_2)	دالة الهدف : $Z = 6x_1 + 10x_2$
a	(0 , 12)	2(0) + 4(12) = 48
b	(3 , 6)	2(3) + 4(6) = 30
c	(7.5 , 1.5)	2(7.5) + 4(1.5) = 21
d	(12 , 0)	2(12) + 4(0) = 24

كما هو واضح فإن النقطة c هى التى تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف وتكون بذلك هى النقطة التى تمثل الحل الأمثل ، حيث :

$x_1^* = 7.5$ ، $x_2^* = 1.5$ ، كما أن قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة هى : $Z = 21$ وهى أصغر قيمة يمكن أن تصل إليها دالة الهدف فى ظل مجموعة القيود الموضوعة .

مثال (٣) :

أوجد بيانياً قيم x_1 , x_2 التى تحقق ما يلى :

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

بشروط أن :

$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_i \ge 0 \quad , \quad (i = 1, 2)$$

الحــل :

يتم تحويل المتباينات إلى معادلات ثـــم نرســم كــل معادلـــة بخــط مستقيم بعد تحديد نقطتين عليه كمـــا يلــــى :

القيد الأول : $x_1 + x_2 = 6$

عندما $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 6$

عندما $x_2 = 0$ فإن $x_1 = 6$

وتكون النقطتان هما : $(6 , 0)$ ، $(0 , 6)$

القيد الثانى : $-2x_1 + x_2 = 2$

عندما $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 2$

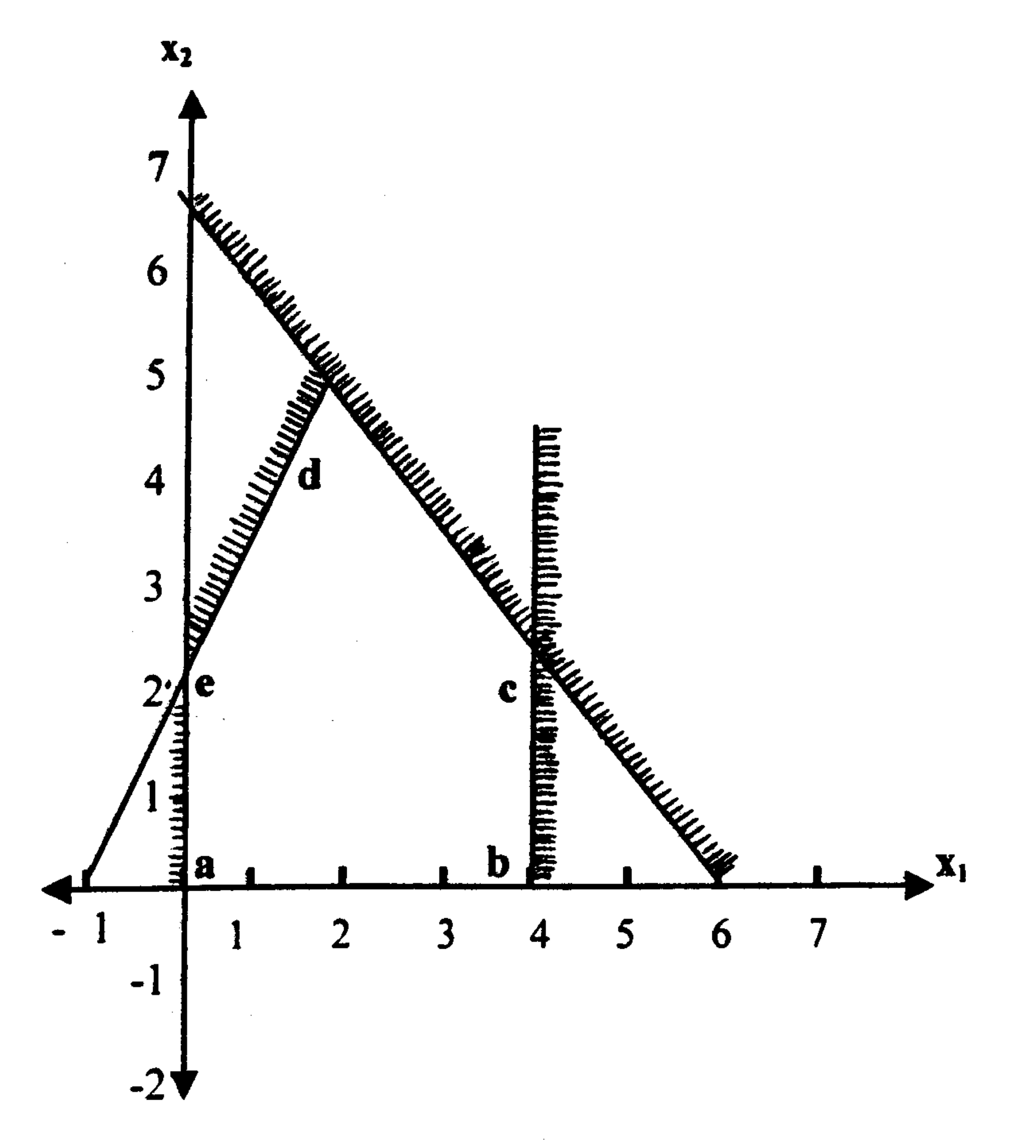
عندما $x_2 = 0$ فإن $x_1 = -1$

وتكون النقطتان هما : $(0 , 2)$ ، $(0 , 1 -)$

القيد الثالث : $x_1 = 4$

يتم رسم معادلة هذا القيــد برســم خطــاً مســتقيماً موازيـــاً للمحــور الصادى عند النقطــة $x_1 = 4$

وبرسم المستقيمات الثلاث السابقة نحصل على الشكل البياني التالي :



وتكون منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة e d c b a ،
وهي تضم عدداً لا نهائياً من الحلول الممكنة ، إلا أن الحل الأمثل الذي يحقق الحد الأقصى للدالة ، Z ، هو إحدى النقاط الطرفية b أو c أو d أو e ، وسوف نستبعد نقطة الأصل ، a ، كما سبق أن بينا .

و لإيجاد نقطة الحل الأمثل ، نعوض بكل نقطة من هذه النقاط في دالة الهدف كما يتضح من الجدول التالي :

النقطة	(x_1 , x_2)	دالة الهدف: $Z = x_1 + 2x_2$
b	(4 , 0)	1(4) + 2(0) = 4
c	(4 , 2)	1(4) + 2(2) = 8
d	(1.3 , 4.6)	1(1.3) + 2(4.6) = 10.5
e	(0 , 2)	1(0) + 2(2) = 4

وكما هو واضح ، فإن النقطة d هى النقطة التى عندها تتحقق أكبر قيمة لدالة الهدف ، وبالتالى تكون هى نقطة الحل الأمثل . ويكون الحل الأمثل على النحو التالى :

$x_1^* = 1.3$ ، $x_2^* = 4.6$ ، وأكبر قيمة لدالة الهدف هى $Z = 10.5$

٢ ـ الحل الرياضى لنموذج البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس)

(Simplex Method)

مما سبق يتضح لنا أن الحل البيانى لنموذج البرمجة الخطية بالرغم من أنه يتميز بسهولة تطبيقه كما أنه يفيد فى فهم خصائص تركيب وحل نموذج البرمجة الخطية ، إلا إنه لا يصلح إلا فى حالة وجود متغيرين قراريين (x_1 , x_2) ويصعب إستخدام هذا الأسلوب البيانى فى حالة وجود ثلاثة متغيرات قرارية (x_1 , x_2 , x_3) ، إذ يتطلب ذلك ثلاثة أبعاد على الرسم البيانى ، ويستحيل استخدامه إذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة .

ومن العرض السابق للحل البيانى لنماذج البرمجة الخطية نلاحظ الحالات الآتية للحلول المختلفة للنموذج :

١ – أى نموذج برمجة خطية يكون له – بوجه عام – عدد لا نهائى من الحلول المسموح بها (أى نقطة تقع داخل أو على حدود منطقة الحلول الممكنة) .

٢ – من بين هذا العدد اللانهائى من الحلول المسموح بها يوجد عدد محدود من الحلول الأساسية المسموح بها (حلول النقاط الطرفية) .

٣ – أحد الحلول الأساسية المسموح بها والذى يجعل دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن يسمى بالحل الأمثل .

لذلك وبسبب محدودية استخدام الأسلوب البيانى فى حل نماذج البرمجة الخطية فقد تمكن الباحث الرياضى دانتزج Dantzig من تقديم طريقة السمبلكس Simplex Method باعتبارها الطريقة العامة الوحيدة التى يمكن استخدامها فى حل كافة نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات القرارية بها . وتتميز هذه الطريقة بالآتى :

١ – أنها مبنية على أساس جبرى مما أدى إلى إمكانية تطبيقها فى مختلف الحالات .

٢ – أنها لا تشترط حساب جميع الحلول الأساسية المسموح بها حيث أنها تبحث دائماً عن حل أفضل من الحل الذى يتم الحصول عليه حتى تصل إلى الحل الأمثل .

٣ – أن هذه الطريقة تستخدم نفس القواعد للإنتقال من أى حل إلى أفضل حل .

وتمثل عمليات الإنتقال هذه المراحل المتتالية اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل .

ويوجد نوعان أساسيان من نماذج البرامج الخطية على أساس طريقة الحل المستخدمة لكل منهما وهما :

النوع الأول : فى هذا النموذج تكون جميع القيود الهيكلية على صورة أصغر من أو تساوى أى على الصورة ≤ ، وجميع قيم الثوابت ، فى نفس الوقت ، موجبة . وطريقة السمبلكس التى تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى " طريقة السمبلكس الأساسية " .

النوع الثانى : فى هذا النموذج تكون كل أو بعض أو أحد القيود على صورة أكبر من أو يساوى أو على صورة يساوى ، أى على الصورة ≥ أو = ، وطريقة السمبلكس التى تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى " طريقة مبدول السمبلكس " . وهذه الطريقة تختلف ، بالطبع ، فى بعض قواعدها وخطواتها عن طريقة السمبلكس العادية ، كما سنرى فيما بعد .

أولاً : طريقة السمبلكس الأساسية *Primal Simplex Method*

يتم الحصول على الحل الأمثل وفقا لطريقة السمبلكس الأساسية من خلال الخطوات الآتية :

١ – تحويل جميع القيود الهيكلية إلى معـــادلات بإضافـــة متغـــير متمـــم موجب الإشارة لكل قيـــد .

٢ – اختيار حل مبدئى أساسى مسموح به ، وفى معظـــم الأحـــوال يتـــم اختيار نقطة الأصل كحل مبدئى ، حيث تكـــون المتغـــيرات المتممـــة المضافة هى المتغيرات الأساســـية ، أى اللاصفريـــة ، بينمـــا تكـــون المتغيرات القرارية غير أساسية ، أى صفريـــة وتكـــون قيمـــة دالـــة الهدف مساوية للصفر فى هذه الحالـــة .

٣ – فى كل مرحلة من مراحل الحل تكتب دالة الـــهدف وكذلـــك القيـــود بدلالة المتغيرات الأساسية ثم تختبر أمثلية الحـــل الـــذى لدينـــا ، فـــإذا كان هو الحل الأمثل تنتهى العملية ، وإن لم يكن كذلـــك ننتقـــل إلـــى حل آخر أفضل منـــه .

ويتم تكرار هذه الخطوة حتى نصل فى النهاية إلى الحل الأمثل .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا نموذج خطـــــى يشـــتمل علـــى متغيرين (x_2 , x_1) وثلاثة قيود هيكلية علـــى الصـــورة :

$$\text{Max } Z = t_1 x_1 + t_2 x_2$$

بشـــوط أن :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq c_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq c_3$$

$$x_i \geq 0 , \qquad (i = 1, 2)$$

فيتم تحويل القيود الهيكلية إلى معادلات وذلـــك بإضافـــة متغــير متمم لكل قيد : المتغــــير x_3 للقيـــد الأول والمتغــير x_4 للقيــد الثانى والمتغير x_5 للقيد الثالث على النحـــو التـــالى :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 = c_3$$

ويكون جدول الحل المبدئى لهذه المشكلة كما يلى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	a_{11}	a_{12}	1	0	0	c_1
x_4	a_{21}	a_{22}	0	1	0	c_2
x_5	a_{31}	a_{32}	0	0	1	c_3
$-Z$	t_1	t_2	0	0	0	0

ويمثل هذا الحل المبدئى ، الممكن فنيـــاً وغـــير المرغـــوب فيـــه – دائما – اقتصادياً ، نقطة البدء فى طريقـــــة الســـمبلكس .

٤ – عند الانتقال من حل أساسى مسموح به إلـــى حـــل آخـــر لابـــد مـــن تحويل أحد المتغيرات غير الأساســـية إلـــى مغـــير أساســـى ويســـمى بالمتغير الداخل ، وكذلك تحويـــــل أحـــد المتغـــيرات الأساســـية إلـــى متغير غير أساسى يسمى بـــالمتغير الخـــارج .

ويتم تحديد كلاً من المتغير الداخل والمتغير الخارج وفقاً لقاعدة معينة حتى نضمن الانتقال إلى حل أفضل ومسموح به .

اختيار المتغير الداخل

يتم اختيار المتغير الداخل على أساس أنه المتغير الأكثر إيجابية فى معادلة دالة الهدف ، فإذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف فيتم اختيار هذا المتغير على أساس أكبر المعاملات الموجبة للمتغيرات غير الأساسية فى الصف (Z -) فى جدول الحل . أما إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف فيتم اختيار المتغير الداخل على أساس أكبر معامل سالب للمتغيرات غير الأساسية فى الصف (Z -) فى جدول الحل . وفى حالة وجود أكثر من معامل متساو، فى أى من حالتى التعظيم والتصغير، نختار أحدهما عشوائياً.

اختيار المتغير الخارج

يتم اختيار المتغير الخارج بحيث يكون الحل الجديد ، مسموحاً به، ويتحقق ذلك باختيار المتغير الأساسى الذى تصبح قيمته صفر قبل غيره عندما تزداد قيمة المتغير الداخل . والقاعدة التى يتم على أساسها اختيار المتغير الخارج هى :

حساب خارج قسمة الثوابت (عناصر العمود الأخير فى الجدول) على العناصر المقابلة لها فى عمود المتغير الداخل الموجبة الإشارة فقط (وذلك بعد استبعاد العناصر السالبة أو التى تساوى صفر من هذا العمود) . ويتم اختيار أقل خارج قسمة ليصبح المتغير الأساسى الذى

يقابلها هو المتغير الخارج (أي الذى سوف يتحول فى المرحلة التالية إلى متغير غير أساسى) . وإذا لم يوجد فى عمود المتغير الداخل أى عنصر موجب الإشارة فيكون النموذج ليس له حل ، وتطبق هذه القاعدة سواء فى حالات الحد الأقصى أو الحد الأدنى لدالة الهدف .

وعند الانتقال من حل أساسى مسموح به إلى حل آخر أفضل منه، إذا اعتبرنا أن عمود المتغير الداخل هو العمود المحورى ، وصف المتغير الخارج هو الصف المحورى ، بينما نعتبر أن العنصر الموجود فى الخلية التى يتقاطع فيها العمود المحورى مع الصف المحورى هو العنصر المحورى ، فإن القواعد التى تحكم عملية الانتقال من مرحلة إلى أخرى فى الحل هى :

١ – **العمود المحورى** : تصبح جميع عناصره فى الحل الجديد أصفار فيما عدا العنصر المحورى يصبح مساوياً للواحد الصحيح .

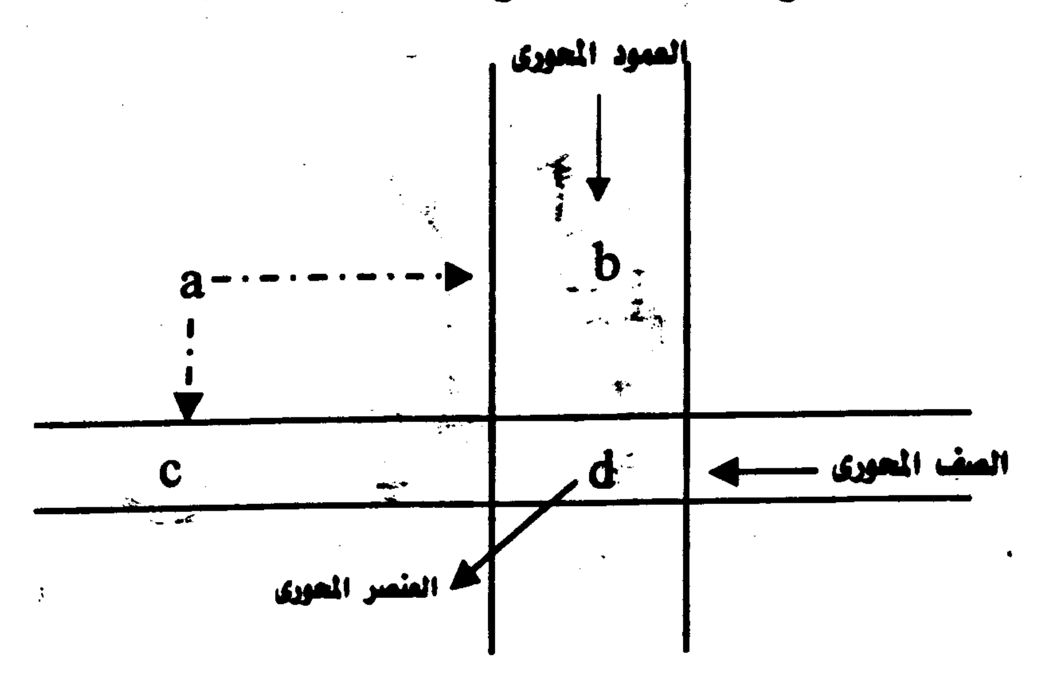
٢ – **الصف المحورى** : ينقل بالجدول الجديد كما هو بعد قسمة كل عنصر من عناصره على العنصر المحورى .

٣ – باقى العناصر تحسب وفقا للقاعدة الآتية :

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر الأصلى} - \frac{\text{العنصر المقابل فى العمود المحورى} \times \text{العنصر المقابل فى الصف المحورى}}{\text{العنصر المحورى}}$$

فإذا فرضنا فى إحدى مراحل الحل الأساسى الممكن أن العنصر الأصلى هو a وأن العنصر المقابل له فى العمود المحورى هو b

والعنصر المقابل له في الصف المحوري هو c وأن العنصر المحوري (الناتج من تلاقي الصف المحوري مع العمود المحوري) هو d ، كما يتضح من الشكل التالي :



شكل (١ – ١)

فإن العنصر الجديد – في المرحلة التالية من مراحل الحل – للعنصر الأصلي a والذي نرمز له بالرمز a' يحسب كما يلي :

$$a' = a - \frac{b \times c}{d}$$

اختبار الأمثلية :-

في كل مرحلة من مراحل الحل ابتداء من مرحلة الحل المبدئي يجرى اختبار الأمثلية للتأكد من أن الحل المتاح هو الحل الأمثل أم أنه حل أساسي مسموح به ويمكن تحسينه في مرحلة أخرى لاحقة على النحو التالي :

إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف :

إذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ، Z ، فى الصف الأخير جميعها سالبة بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية وأصفار بالنسبة للمتغيرات الأساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ، أما فى حالة وجود معاملات موجبة الإشارة للمتغيرات غير الأساسية فى صف دالة الهدف ، Z ، فإن ذلك يعنى أن الحل الحالى ليس هو الحل الأمثل وهناك إمكانية لتحسينه .

إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف :

إذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ، Z ، فى الصف الأخير من الجدول جميعها موجبة بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية وأصفار بالنسبة للمتغيرات الأساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل المنشود ، بينما وجود معاملات سالبة الإشارة للمتغيرات غير الأساسية فى صف دالة الهدف يعنى أن الحل الجارى ليس هو الحل الأمثل ، ولابد من الانتقال إلى مرحلة تالية لتحسينه .

مثال (٤) :

حل البرنامج الخطى التالى مستخدماً طريقة السمبلكس .

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

بشرط أن :

$$x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 30$$
$$3x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_i \ge 0 , \qquad (i = 1, 2)$$

الحـــل :

نقوم أولاً بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات متممة موجبة وهى : x_5 , x_4 , x_3 *بواقع متغير متمم لكل قيد :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$5x_1 + 4x_2 + x_4 = 30$$
$$3x_1 + x_2 + x_5 = 15$$

ويكون الجدول الذى يمثل الحل المبدئى هو :

الجولة الأولى :

المتغيرات الاساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	1	2	1	0	0	12
x_4	5	4	0	1	0	30
x_5	3	1	0	0	1	15
$-Z$	40	50	0	0	0	0

فى هذا الحل المبدئى يلاحظ أن :

المتغيـــرات الأساسيـــة هـــى المتممـــات المضافة وهى : $x_3 = 12$ ، $x_4 = 30$ ، $x_5 = 15$.

المتغيرات غير الأساسية هى : $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$.

قيمة دالة الهدف هى : $Z = 0$.

اختبار الأمثلية :

حيث أن معاملى المتغيرين غير الأساسيين فى صف دالة الهدف (Z -) ، هما : 50 , 40 وكلاهما قيمة موجبة ، فيكون الحل المبدئى ليس هو الحل الأمثل وهناك إمكانية لتحسينه ، وبما أن المعامل 50 فى صف دالة الهدف هو أكبر معامل موجب ، فيكون المتغير x_2 هو المتغير الداخل ويكون عمود x_2 بالتالى هو العمود المحورى .

ولتحديد الصف المحورى نقوم بقسمة عناصر عمود الثوابت (أى العمود الأخير فى الجدول) على العناصر المقابلة لها فى العمود المحورى والموجبة فقط فنحصل على :

$$\frac{15}{1} = 15 \quad , \quad \frac{30}{4} = 7.5 \quad , \quad \frac{12}{2} = 6$$

وحيث أن أصغر خارج قسمة هو القيمة 6 والتى تقابل المتغير x_3 فيكون x_3 هو المتغير الخارج وبالتالى فإن صف x_3 يكون هو الصف المحورى ، ونتيجة لتلاقى الصف المحورى (صف x_3) مع العمود المحورى (عمود x_2) ينشأ العنصر المحورى وهو القيمة 2 .

الجولة الثانية :

ثم ننتقل بعد ذلك إلى إحلال المتغير الداخل x_2 محل المتغير الخارج x_3 مع تطبيق القواعد التحويلية التى سبق الإشارة إليها فنحصل على الجدول التالى :

المتغيرات الاساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	6
x_4	3	0	- 2	1	0	6
x_5	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	9
- Z	15	0	- 25	0	0	- 300

هذا الجدول يعطى الحل الأساسى المسموح بـــه التـــالى :

المتغيرات الأساسية هـــى :

$$x_5 = 9 \quad ، \quad x_4 = 6 \quad ، \quad x_2 = 6$$

المتغيرات غير الأساسية هى :

$$x_1 = x_3 = 0$$

قيمة دالة الهدف هى : $Z = 300$

حيث أمكن تحقيق بعض الربح لأن المتغير x_2 أصبح متغيراً أساسيا

اختبـــار الأمثليـــة :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجـــدول الثـــانى نجـــد أن هـــذا الحـــل الأساسى المسموح به ليس هو الحل الأمثل وذلك لوجـــــود معـــامل موجـــب الإشارة فى صف دالة الهدف لأحد المتغيرات غـــير الأساســـية وهـــو x_1 ، أى أن هذا الحل يقبل التحســــين .

بما أن المتغير x_1 هو المتغير الوحيد الذى له معامل موجب فى صف دالة الهدف ، لذا يتعين اختياره كمتغير داخل ويكون عمود x_1 بالتالى هو العمود المحورى .

لتحديد الصف المحورى ، فكما سبق أن بينا ، نقسم عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود المحورى الموجبة المناظرة لها فنحصل على :

$$9 \div \frac{5}{2} = 3.6 \quad , \quad 6 \div 3 = 2 \quad , \quad 6 \div \frac{1}{2} = 12$$

وأقل خارج قسمة هو القيمة 2 وتناظر صف x_4 ، وعليه ، فيكون المتغير x_4 هو المتغير الخارج ويكون صف x_4 هو الصف المحورى ، والعنصر المحورى فى هذه المرحلة هو القيمة 3 ، وننتقل إلى الجولة التالية مع تطبيق نفس القواعد التحويلية .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	0	1	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	5
x_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
x_5	0	0	$\frac{7}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	4
$-Z$	0	0	-15	-5	0	-330

من الجدول السابق ينتــــج أن :

المتغيرات الأساسية هـــى :

$$x_1 = 2 \quad ، \quad x_2 = 5 \quad ، \quad x_5 = 4 .$$

المتغيرات غير الأساسية هـــى :

$$x_3 = x_4 = 0$$

قيمة دالة الهدف هى : $Z = 330$

اختبــار الأمثليــة :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول الثالث نجد أن لا يوجد معــاملات موجبة فى صف دالة الهدف ، أى أن معاملات المتغيرات غير الأساسية كلــها أصبحت سالبة وبذلك يكون الحل الجارى هو الحل الأمثل وهو : $x_1^* = 2$ ، $x_2^* = 5$ ، وتكون أكبر قيمة لدالة الهدف هى : $Z = 330$.

مثـال (٥) :

استخدم طريقــة الســمبلكس فــى إيجــاد الحــل الأمثــل للنمــوذج الخطى التــالى :

$$\text{Min } Z = -26x_1 - x_2 - 2x_3$$

بشرط أن :

$$12x_1 + x_2 + x_3 \le 30$$

$$30x_1 + x_2 - 4x_3 \le 45$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 2$$

$$x_i \ge 0 \;, (i = 1, 2, 3)$$

الحـــل :

نحول المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير متمم لكل قيد :

$$12x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

$$30x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 45$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_6 = 2$$

ويكون الحل المبدئى والذى يمثل الجولة الأولى من الحل كما يلى :

الجولة الأولـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_2	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	12	1	1	1	0	0	30
x_5	30	1	- 4	0	1	0	45
x_6	2	3	0	0	0	1	2
- Z	- 26	- 1	- 2	0	0	0	0

حيث أن المطلوب هو جعل دالـــة الـــهدف ، Z ، حـــد أدنــــى وحيـــث أن معاملات المتغـــيرات غـــير الأساســـية فـــى الصـــف (Z -) بـــالجدول السابق كلها سالبة الإشارة فيكون الحل المبدئـــى الحـــالى ليـــس هـــو الحـــل الأمثل .

وحيث أن المعامل 26 - فـــى الصـــف (Z -) هـــو أكـــبر معـــامل سالب فيكون المتغـــير x_1 هـــو المتغـــير الداخـــل ويكـــون عمـــوده هـــو العمود المحـــورى .

لتحديد المتغير الخارج ، نقسم عناصر عمود الثوابت علـــى العنـــاصر المناظرة لها فى العمود المحورى الموجبة فقط فنحصل على :

$$\frac{2}{2} = 1 \quad , \quad \frac{45}{30} = 1.5 \quad , \quad \frac{30}{12} = 2.5$$

وحيث أن أصغر خارج قسمة هو القيمة 1 والتـــى تقـــابل المتغـــير x_6 ، فيكون المتغير x_6 هو المتغير الخارج ويكـــون صفـــه هـــو الصـــف المحورى . ونقطة تلاقى الصف المحـــورى مـــع العمـــود المحـــورى هـــى القيمة 2 وتكون هى العنصر المحورى ، وننتقل بعـــد ذلـــك إلـــى الجولـــة التالية :

الجولة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	0	- 17	1	1	0	- 6	18
x_5	0	- 44	- 4	0	1	- 15	15
x_1	1	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
- Z	0	38	- 2	0	0	13	26

بتطبيق اختبار الأمثلية على هذا الحـــل نجـــد أنـــه ليـــس هـــو الحـــل الأمثل نظراً لوجود معاملات سالبة فـــى الصـــف (Z -) .

وحيث أن المعامل (2 -) هو المعامل السالب الوحيد فى الصف (Z -) فيكون المتغير x_3 هو المتغير الداخل ويكون عموده هو العمود المحورى ، ثم بقسمة عناصر عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها فى العمود المحورى الموجبة فقط (حيث لانقسم على العناصر سالبة الإشارة أو العناصر ذات القيمة صفر) فينشأ لدينا خارج القسمة الوحيد $18 = 1 \div 18$ ، فيكون المتغير الخارج هو المتغير x_4 ويكون الصف الأول من الجدول هو الصف المحورى ، ويكون بالتالى العنصر المحورى هو القيمة 1 ، وننتقل بعد ذلك الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	0	- 17	1	1	0	- 6	18
x_5	0	- 112	0	4	1	- 39	87
x_1	1	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
- Z	0	4	0	2	0	1	62

بتطبيق إختبار الأمثلية على الجدول السابق نجد أن معاملات المتغيرات غير الأساسية وهى : x_2 , x_4 , x_6 فى الصف (Z -)

أصبحت كلها موجبة الإشارة فيكون الحل الحالى هـو الحـل الأمثـل وهـو على النحو التـالى :

$$x_1^* = 1 \quad ، \quad x_3^* = 18 \quad ، \quad x_5^* = 87 .$$

وأصغر قيمة لدالة الهدف هى : $Z = -62$

ثانياً : طريقة مبدول السمبلكس ***Dual Simplex Method***

رأينا فى الجزء السـابق كيفيـة إمكـان تطبيـق طريقـة السـمبلكس الأساسية لحل مشـاكل تعظيـم الأربـاح حيـث تكـون القيـود الهيكليـة المرتبطة بها فى الغالب فى الصـورة أصغـر مـن أو يسـاوى كمـا فـى مثال (٤) . ويمكن استخدام طريقة السمبلكس الأساسـية أيضـاً فـى حـل مشاكل تخفيض التكاليف بنفس الطريقة كما فـى المثـال (٥) حيـث تركـز القيود الهيكليـة المرتبطـة بـها فـى الغـالب علـى مسـتويات الجـودة والمواصفات المطلوبة وبالتالى تكون فى الصورة أكـبر مـن أو تسـاوى.

وكما رأينا سابقاً ، عندما تكون جميع القيـود الهيكليـة فـى الصـورة أصغر من أو تساوى وكانت جميع القيـم المطلقـة موجبـة ، يتـم إدخـال متغيرات متممة موجبة لتحويل المتباينـات إلـى معـادلات وتكـون نقطـة الأصل هى الحل المبدئى (علـى أسـاس أنـها أحـد الحلـول الأساسـية المسموح بها) . ولكن عندما تكون كل أو بعض أو أحـد القيـود الهيكليـة فى صورة أكبر مـن أو يسـاوى أو فـى صـورة يسـاوى ، فـإن نقطـة الأصـل قد لا تمثل حلاً أساسياً ، كما أنـها قـد لا تكـون حـلاً مسـموحاً به ، إذ أن المتغيرات المتممة التى يتم إدخالها قد تكـون سـالبة الإشـارة.

ويعالج هذا الوضع بإضافة متغيرات صناعية Artifical Variables موجبة الإشارة بخلاف المتغيرات المتممة السالبة ، وتسمى طريقة الحل المستخدمة فى هذه الحالة " طريقة السمبلكس على مرحلتين " Two – Phase Simplex Method ، ففى المرحلة الأولى يتم التخلص من المتغيرات الصناعية أى تخفيض قيمتها إلى أصفار ، فإذا تم ذلك تبدأ المرحلة الثانية وفيها يتم تحسين الحل الأساسى المسموح به إلى أن نصل إلى الحل الأمثل . أما إذا كانت هذه المتغيرات الصناعية لا تصل جميعها إلى أصفار فى المرحلة الأولى فيعتبر ذلك دليلاً على عدم وجود حل أساسى مسموح به للنموذج الأصلى .

ويعاب على طريقة السمبلكس على مرحلتين أنها مرهقة حسابياً ويصاحبها تعقيدات مرتبطة بالمتغيرات الصناعية خصوصاً إذا أشتمل النموذج الأصلى على عدد كبير من المتغيرات القرارية والقيود الهيكلية . لهذا سوف يكتفى المؤلف هنا بتقديم طريقة بديلة ، تعالج نفس المواقف التى تعالجها طريقة السمبلكس على مرحلتين ، حيث يشتمل النموذج الأصلى على قيود هيكلية فى صورة أكبر من أو يساوى أو فى صورة يساوى ، ولكن بسهولة حسابية أكثر وفى وقت أقل ، وتسمى هذه الطريقة " طريقة مبدول السمبلكس " .

وفى طريقة مبدول السمبلكس يتم تحويل القيود الموجودة على صورة أكبر من أو يساوى إلى صورة أصغر من أو يساوى وذلك بضرب طرفى المتباينة فى 1 - ، أما القيود الموجودة على شكل

أصغر من أو يساوى فنترك كما هـى ، فـى حيـن أن القيـود الموجـودة على الصورة = ، فيستبدل كل قيد منها بقيدين : أحدهمـا علـى صـورة أصغر من أو يساوى ويترك كما هو ، والآخر علـى صـورة أكـبر مـن أو يساوى ثم يضرب طرفيه فى 1 - ليتحول إلـى الصـورة أصغـر مـن أو يساوى . ويلاحظ أن عدد القيود الهيكليـة بـالنموذج فـى هـذه الحالـة سوف تزداد بواقع قيد مقابل كل قيـد هيكلـى علـى الصـورة = ، بعـد ذلك يضاف لكل قيد متغير متمم موجب الإشـارة لتحويـل المتباينـات إلـى معادلات ، تماما مثـل مـا يحـدث فـى طريقـة السـمبلكس الأساسـية ، وبالتالى تتمـيز هـذه الطريقـة بأنـها تسـتغنى كليـة عـن المتغـيرات الصناعية. وتبدأ هذه الطريقة بحلول أساسية غير مسـموح بـها ثـم تتجـه إلى الإمكانية ومنها إلى الأمثليـة .

ويوجد عدة اختلافـات بيـن طريقـة مبـدول السـمبلكس وطريقـة السمبلكس الأساسية فيما يتعلق بقواعد اختبـار الأمثليـة واختيـار المتغـير الخارج واختيار المتغير الداخل عند الانتقـال مـن مرحلـة إلـى مرحلـة أخرى فى الحـل .

ففى طريقة مبدول السمبلكس يتبع الآتى فـى الحـالات التاليـة :

١ - اختيار المتغير الخارج

تبدأ هذه الطريقة بتحديد المتغير الخارج علـى أسـاس أنـه المتغـير الأساسى الذى يقابل أكبر قيمة سالبة فى ثوابـت القيـود ، ويكـون صـف ذلك المتغير هو الصف المحورى ، ويستوى فـى ذلـك ، الحـد الأقصـى

أو الحد الأدنى لدالة الهدف (بينمـــا يبــدأ الحــل فــى طريقــة الســمبلكس الأساسية – كمـــا رأينـــا – بتحديــد المتغــير الداخــل أى المتغــير غــير الأساسى والمطلوب تحويله فى المرحلة التالية إلـــى متغــير أساســى) .

٢ – اختيار المتغير الداخل :

ثم يلى ذلك تحديــــد المتغــير الداخــل أى المتغــير غــير الأساســى والذى سوف يصبح أساسياً فى المرحلة التالية مـــن مراحــل الحــل وذلــك بقسمة معاملات صـــف دالـــة الـــهدف علـــى المعــاملات المنــاظرة لــها بالصف المحورى الذى سبق تحديده ، الســـالبة فقــط (وبالتـــالى نتجـــاهل القيم الموجبة والقيم ذات القيمة صفـــر لمعـــاملات الصـــف المحـــورى) ، ونختار المتغير الـــذى يقـــابل أقـــل خـــارج قســمة – بغــض النظــر عن إشارات خارج القسمة – فيكون هو المتغير الداخـــل فـــى المرحلـــة التاليـــة ويكون بالتالى عمود ذلك المتغير هو العمـــود المحـــورى .

تستمر جولات الحل إلى أن تصبح المتغـــيرات الأساســية كلــها ذات قيم موجبة الإشارة فى العمود الأخير من الجـــدول وهـــو عمـــود الثوابـــت فيصبح الحل فى هذه الحالة حلاً مسموحاً بـــه (أى حـــلاً ممكنـــاً) .

٣ – اختبار الأمثليـــة :

بعد أن يصبح الحل الذى تم التوصل إليـــه حـــلاً مســموحاً بـــه (أى حلاً ممكناً) يجرى اختبـــار الأمثليـــة وفقـــا لقواعـــد طريقـــة الســـمبلكس الأساسية للتأكد من أن الحل المتاح هو الحل الأمثـــل أم أنـــه حـــل أساســـى

مسموح به ويمكن تحسينه فى مرحلة لاحقة - كما سبق أن بينا - على النحو التالى :

أ - إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأقصى لدالة الهدف :

فإذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ، Z ، فى الصف الأخير جميعها سالبة أو بعضها أو أحدها قيمتها تساوى صفر بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية ، بينما قيمة تلك المعاملات تساوى أصفار بالنسبة للمتغيرات الأساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل .

ب - إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف :

فإذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف ، Z ، فى الصف الأخير من الجدول جميعها موجبة أو بعضها أو أحدها قيمتها تساوى صفر بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية ، بينما قيمة معاملات المتغيرات الأساسية فى الصف نفسه تساوى أصفار نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل المنشود .

وفى حالة ما إذا كانت معاملات الصف المحورى الذى تم ترشيحه غير سالبة ، مع وجود بعض القيم السالبة فى عمود الثوابت ، فإن المشكلة الأصلية لن يكون لها حلاً أساسياً مسموحاً به .

أما باقى القواعد التحويلية التى سبق تقديمها عند عرضنا لطريقة السمبلكس الأساسية فتظل كما هى وذلك من حيث :

١ - **العمود المحورى** : تصبح جميع عناصره - فى الحل الجديد - أصفار فيما عدا العنصر المحورى يصبح مساوياً (1) .

٢ - الصف المحورى : ينقل – بالجدول الجديد – كما هو بعد قسمة كل عنصر من عناصره على العنصر المحورى .

٣ - باقى العناصر تحسب وفقا للعلاقة التالية :

العنصر الجديد = العنصر الأصلى

$$- \frac{\text{العنصر المقابل فى العمود المحورى} \times \text{العنصر المقابل فى الصف المحورى}}{\text{العنصر المحورى}}$$

مثال (٦) :

استخدم طريقة السمبلكس فى حل النموذج التالى

$$Min\ Z = 60x_1 + 30x_2$$

بشروط أن :

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$6x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2)$$

الحل :

نبدأ أولاً بتحويل كل من القيدين الأول والثانى إلى الصورة أصغر من أو يساوى وذلك بضرب طرفى كل منهما فى (1 -) ، أما القيد الثالث فيترك كما هو لأنه أصلاً على الصورة أصغر من أو يساوى .

$$-x_1 - x_2 \leq -8$$
$$-6x_1 - 4x_2 \leq -12$$
$$x_1 \leq 20$$

ثم نضيف لكل قيد متغير متمم موجب الإشارة ليتحول من متباينة إلى معادلة كما يلي :

$$-x_1 - x_2 + x_3 = -8$$
$$-6x_1 - 4x_2 + x_4 = -12$$
$$x_1 + x_5 = 20$$

بظهور قيم سالبة فى عمود الثوابت ، لذا فإننا نستخدم طريقة مبدول السمبلكس لحل النموذج ، وتستمر جولات الحل على النحو التالى :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	-1	-1	1	0	0	-8
x_4	-6	-4	0	1	0	-12
x_5	1	0	0	0	1	20
-Z	60	30	0	0	0	0

فى هذا الحل المبدئى نجد أن :

المتغيرات الأساسية هى المتممات المضافـــة وهـــى :

$x_5 = 20$, $x_4 = -12$ ، $x_3 = -8$

المتغيرات غير الأساسية هى : $x_2 = 0$, $x_1 = 0$

اختبار الأمثلية :

حيث أن بعض معاملات المتغيرات الأساســـية فـــى عمـــود الثوابـــت لها قيماً سالبة لذلك فإن الحل الحالى غير مسموح بـــــه (أو غـــير ممكـــن) ، ويكون الهدف فى هذه المرحلة هو تحويل الحل مـــن حـــل غـــير مســـموح به إلى حل مسموح به . لذلك سوف نختـــار المتغـــير الأساســـى الـــذى لـــه أكبر معامل سالب في عمود الثوابت وهـــو المتغـــير x_4 كمتغـــير خـــارج ويكون صف x_4 هو الصف المحورى . ولتحديـــد المتغـــير الداخـــل يتـــم قسمة معاملات دالة الهدف الموجودة بـــالصف الأخـــير مـــن الجـــدول (أى صف (Z -) على العناصر المنـــاظرة لـــها بـــالصف المحـــورى الســـالبة فقط (مع تجاهل الإشارة الناتجة لخارج القسمة) كمـــا يلـــى :

$$30 \div (-4) = -7.5 \quad , \quad 60 \div (-6) = -10$$

وحيث أن أقل خـــارج قســـمة – بعـــد تجـــاهل الإشـــارة (–) هـــو القيمة 7.5 والذى يقابل المتغير x_2 فيكـــون x_2 هـــو المتغـــير الداخـــل ويكون عمـــود x_2 هـــى العمـــود المحـــورى وتكـــون القيمـــة (4 -) هى العنصر المحـــورى .

الجولة الثانية :-

يتم إحلال المتغير x_2 محل المتغير x_4 وتطبق نفس القواعد التحويلية التى سبق الإشارة إليها ....

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	- 5
x_2	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	3
x_5	1	0	0	0	1	20
- Z	15	4	0	$\frac{15}{2}$	0	- 90

حيث أن عمود الثوابت مازال يحتوى على قيمة سالبة (5 -) لذلك فإن الحل الحالى مازال حلا غير مسموح به ، وحيث أن هذه القيمة هى القيمة السالبة الوحيدة فى عمود الثوابت فيكون المتغير الخارج هو المتغير x_3 ويكون الصف الأول بالجدول السابق هو الصف المحورى .

لتحديد المتغير الخارج يتم قسمة عناصر الصف (Z -) على العناصر المناظرة لها بالصف المحورى السالبة فقط ، حيث لا يكون لدينا سوى خارج

القسمة $-30 = \frac{15}{2} \div (-\frac{1}{4})$ ونتجاهل إشارة (−) في خارج القسمة (بينما لا يجوز قسمة 15 على $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{2}$ قيمة موجبة) . ومن ثم يكون المتغير x_4 هو المتغير الداخل ، ويكون عمود المتغير x_4 بالجدول الأخير هو العمود المحورى ويكون العنصر $(-\frac{1}{4})$ هو العنصر المحورى .

الجولة الثالثة :

يتم إحلال المتغير x_4 محل المتغير x_3 وتطبق نفس القواعد التحويلية

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	- 2	0	4	1	0	20
x_2	1	1	- 1	0	0	8
x_5	1	0	0	0	1	20
- Z	30	0	30	0	0	- 240

يلاحظ أن عناصر عمود الثوابت في الجدول السابق أصبحت كلها قيماً موجبة لذلك فإن الحل الحالى أصبح حلاً مسموحاً به (أو ممكناً) ونبدأ بعد ذلك فى البحث عن الحل الأمثل .

اختبار الأمثليــــة :

بتطبيق اختبار الأمثليـــة علـــى الجـدول الســابق نجــد أن معـــاملى المتغيرين غيـــر الأساسيين وهما : x_1 , x_3 فـــــى صــف دالـــة الـــهدف (Z -) موجبى الإشارة وكـــان المطلـــوب هـــو جعـــل دالـــة الـــهدف ، Z ، أصغــر ما يمكـــن ، لذلك يكون الحل الحـــالى هـــو الحـــل الأمثـــل وهـــو كما يلـــى :

$$x_2^* = 8 \quad , \quad x_4^* = 20 \quad , \quad x_5^* = 20$$

وأصفر قيمة لدالة الهدف هى : $Z = 240$.

مثـال (٧) :

استخدم طريقة السمبلكس فى حل النمـــوذج التـــالى :

$$\text{Min } Z = 12x_1 + 9x_2$$

بشــرط أن :

$$8x_1 + 4x_2 \leq 240$$

$$15x_1 + 10x_2 \leq 450$$

$$9x_1 + 6x_2 \leq 360$$

$$-x_1 - x_2 \leq -20$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2)$$

الحـــل :

نبدأ بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلـــك بإضافـــة متغــير متمــم موجب الإشارة لكل قيد على النحــو التــالى :

$$8x_1 + 4x_2 + x_3 = 240$$
$$15x_1 + 10x_2 + x_4 = 450$$
$$9x_1 + 6x_2 + x_5 = 360$$
$$-x_1 - x_2 + x_6 = -20$$

لوجود قيمة سالبة فى ثوابت القيود سوف نستخدم أولا طريقـــة مبـــدول السمبلكس لتحويل الحل من حل غير مسموح به إلى حل مسموح به من خلال جولات الحل التالية :

الجولة الأولـــــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	8	4	1	0	0	0	240
x_4	15	10	0	1	0	0	450
x_5	9	6	0	0	1	0	360
x_6	-1	-1	0	0	0	1	-20
-Z	12	9	0	0	0	0	0

سوف نختار المتغير الذى له قيمة سالبة فى عمود الثوابت وهو المتغير x_6 كمتغير خارج ويكون صف x_6 هو الصف المحورى ، ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة معاملات صف (Z -) على العناصر المناظرة لها السالبة الإشارة بالصف المحورى كما يلى :

$$12 \div (-1) = -12 \quad , \quad 9 \div (-1) = -9$$

وبتجاهل إشارة خارج القسمة فيكون أقل خارج قسمة هو القيمة 9 وبالتالى يكون المتغير x_2 هو المتغير الداخل ويكون العمود الثانى بالجدول السابق هو العمود المحورى ، ويكون العنصر (1 -) هو العنصر المحورى ، وننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	4	0	1	0	0	4	160
x_4	5	0	0	1	0	10	250
x_5	3	0	0	0	1	6	240
x_2	1	1	0	0	0	- 1	20
- Z	3	0	0	0	0	9	- 180

حيث أن عناصر عمود الثوابت فـي الجـدول السـابق أصبحـت كلها قيما موجبة فيصبح الحل الحالى حلاً مسـموحاً بـه ونبحـث بعـد ذلك عن الحل الأمثـل .

اختبار الأمثليـة :

بتطبيق اختبار الأمثلية علـى الجـدول السـابق نجـد أن المتغـيرين غير الأساسيين وهما : x_6 , x_1 لهما معاملين موجبيـن فـى صـف دالـة الهدف ، Z ، بالجدول ، وحيث أن المطلـوب هـو تعظيـم دالـة الـهدف فيكون الحل الحالى مسموحاً به ولكنه ليس بالحل الأمثـل وهنـاك إمكانيـة لتحسـينه .

باستخدام طريقـة السـمبلكس الأساسـية يتـم اختيـار المتغـير x_6 كمتغير خارج ويكـون عمـود هـذا المتغـير هـو العمـود المحـورى ، ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة عناصر عمـود الثوابـت علـى العنـاصر المناظرة لها بالعمود المحورى الموجبة فقط كمـا يلـى :

$$240 \div \quad = 40 \quad , \quad 250 \div 10 = 25 \, , \quad 160 \div 4 = 40$$

ويؤخذ المتغير المناظر لأقـل خـارج قسـمة وهـو المتغـير x_4 كمتغـير خارج ويكون صف x_4 هو الصف المحورى – ثـم ننتقـل إلـى الجولـة التالية :

الجولة الثالثـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	2	0	1	- 0.4	0	0	60
x_6	0.5	0	0	0.1	0	1	25
x_5	0	0	0	- 0.6	1	0	90
x_2	1.5	1	0	0.1	0	0	45
- Z	- 1.5	0	0	- 0.9	0	0	- 405

اختبار الأمثليـــة :

بتطبيـــق اختبـــار الأمثليـــة علـــى الجـــدول الســـابق يلاحـــــظ أن المتغيرات غير الأساســـية همـــا المتغـــيرين x_1 , x_4 ولـــهما معـــاملين سالبين فى صف دالة الهدف ، Z ، وحيث أن المطلوب هـــو تعظيـــم دالـــة الهدف فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل وهو كمـــا يلـــى :

$$x_6^* = 25 \quad , \quad x_5^* = 90 \quad , \quad x_3^* = 60 \quad , \quad x_2^* = 45$$

وأكبر قيمة لدالة الهدف هى : $Z = 405$.

مثـال (٨) :

استخدم طريقة السمبلكس فى حل النمـــوذج التـــالى :

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

بشـرط أن :

$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 10$$
$$x_i \ge 0 \quad , \quad (i = 1, 2)$$

الحـل :

حيث أن القيـد الأول علـى الصـورة = ، فيسـتبدل هـذا القيـد بقيدين أحدهما علـى الصـورة أصغـر مـن أو يسـاوى والآخـر علـى الصورة أكبر من أو يساوى فتصبح قيود النمـوذج كمـا يلـى :

$$2x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 + x_2 \ge 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 10$$

نضرب طرفى القيد الثانى فى (1 -) ليتحول إلى الصورة أصغر من أو يساوى حيث :

$$2x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 - x_2 \le -3$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 10$$

نحول المتباينـات إلـى معـادلات بإضافـة متغـير متمـم موجـب الإشارة لكل قيد كما يلـى :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$-2x_1 - 10x_2 + x_4 = -3$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_5 = 10$$

بظهور قيمة سالبة فى ثوابت القيود فيكون الحل غير مسموح به ونستخدم طريقة مبدول السمبلكس لتحويل الحل إلى حل مسموح به كما يلى :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	3
x_4	- 2	-1	0	1	0	- 3
x_5	4	3	0	0	1	10
-Z	4	1	0	0	0	0

باختيار المتغير الذى له قيمة سالبة فى عمود الثوابت وهو المتغير x_4 كمتغير خارج ويكون صف x_4 هو الصف المحورى ، ولتحديد المتغير الداخل يتم قسمة معاملات صف (Z -) على العناصر المناظرة لها ذات الإشارة السالبة حيث :

$$4 \div (-2) = -2 \quad , \quad 1 \div (-1) = -1$$

بتجاهل إشارة خارج القسمة فيكون أقل خارج قسمة هو القيمة (1) فيشير ذلك إلى أن المتغير الداخل هو المتغير x_2 ويكون عمود x_2 هو العمود المحورى ، والعنصر (1 -) هو العنصر المحورى وننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الثانيــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	0	0	1	1	0	3
x_2	2	1	0	- 1	0	3
x_5	- 2	0	0	3	1	1
- Z	2	0	0	1	0	- 3

باختفاء القيم السالبة من عمــود الثوابــت بــالجدول الســابق يصبــح الحل الحالى مسموحاً به ، ونبحث حينئذ عن الحـــل الأمثــل .

اختبار الأمثليــة :

المتغيران غــير الأساســيين بــالحل الســابق همــا x_4 , x_1 لــهما معاملان موجبان فى صف دالة الــهدف ، Z ، وحيــث أن المطلــوب هــو تعظيم دالة الهدف فيكون الحل الحــالى مســموحاً بــه ولكنــه غــير أمثــل ويمكن تحســينه .

ووفقا لقواعد طريقة السمبلكس الأساســـية يتــم اختيــار المتغــير x_1 كمتغير داخل لأن له أكبر قيمة موجبة فـــى صــف (Z -) ويكــون عمــود هذا المتغير هـــو العمــود المحــورى ، ولتحديــد المتغــير الداخــل نقســم عناصر عمـــود الثوابــت علــى العنــاصر المنــاظرة لــها ذات الإشــارة الموجبة بالعمود المحورى ، فنجد أن خارج القسمة الوحيــد الممكــن هــو:

$3 \div 2 = 1.5$

فيكون المتغير الخارج هو x_2 ويكــون صــف هــذا المتغــير هــو الصف المحورى وننتقل إلى الجولــة التاليــة :

الجولة الثالثــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	0	0	1	1	0	0
x_1	1	0.5	0	- 0.5	0	1.5
x_5	0	1	0	2	1	4
- Z	0	- 1	0	2	0	- 6

حيث أن المتغير غير الأساسى x_4 مازال لــه معــامل موجــب فــى صف دالة الهدف (Z -) فإن الحــل الحــالى يكــون غــير أمثــل ويمكــن تحسينه ويكون المتغير x_4 هــو المتغــير الداخــل ، وعمــود x_4 هــو العمود المحورى . ولتحديـــد الصــف المحــورى نقسـم عنــاصر عمــود الثوابت بالجدول الأخير علــى عنــاصر العمــود المحــورى ذات الإشــارة الموجبة ، حيــث :

$4 \div 2 = 2 \quad , \quad 0 \div 1 = 0$

ويكون المتغير x_3 هو المتغير الخارج (حيث له أقل خارج قسمة) ويكون صف x_3 هو الصف المحورى وننتقل بعد ذلك إلى الجولة التالية :

الجولة الرابعـــة :

الثوابت	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	المتغيرات الأساسية
0	0	1	1	0	0	x_4
1.5	0	0	0.5	0.5	1	x_1
4	1	0	- 2	1	0	x_5
- 6	0	0	- 2	- 1	0	- Z

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجــدول الســابق يلاحـــظ أن المتغـــيرين غير الأساسيين فى هذه الجولة همـــا : x_2 , x_3 ولـــهما معـــاملين ســـالبين فى صف (Z -) وهما 1 - , 2 - علـــى الــترتيب ، وحيــث أن المطلــوب هو تعظيم دالة الهدف ، Z ، فيكـــون الحــل الحــالى هــو الحــل الأمثــل وهـو:

$$Z = 6 \quad , \quad x_5^* = 4 \quad , \quad x_4^* = 0 \quad , \quad x_1^* = 1.5$$

ملاحظات عامة على طريقة السمبلكس

١ - إذا كان أحد عناصر الصف المحورى فى أيـــة جولـــة مـــن جـــولات الحل يساوى صفر فإن عناصر العمود المتقــاطع مـــع هـــذا العنصـــر تظل كما هى بدون تغيـــير فـــى جولـــة الحـــل التاليـــة بعـــد تطبيـــق القواعد التحويليـــة .

بالمثل ، إذا كان أحد عناصر العمود المحورى فى أية جولة من جولات الحل يساوى صفر فإن عناصر الصف المتقاطع مع هذا العنصر تظل كما هى بدون تغيير فى جولة الحل التالية .

٢ – عند استخدام طريقة السمبلكس الأساسية ، إذا كانت عناصر عمود المتغير الداخل (أى عناصر العمود المحورى) جميعها سالبة و/ أو تساوى صفر فإنه يتعذر اختيار المتغير الخارج وبالتالى الاستمرار فى تحسين الحل ويكون الحل فى هذه الحالة غير محدود وهذا يعنى أن المتغير يمكن أن يأخذ قيمة كبيرة للغاية مما يزيد من قيمة دالة الهدف إلى مالانهاية .

بالمثل ، عند استخدام طريقة مبدول السمبلكس ، إذا كانت عناصر صف المتغير الخارج (أى عناصر الصف المحورى) جميعها موجبة و / أو تساوى صفر فإنه يتعذر اختيار المتغير الداخل وبالتالى الاستمرار فى الاتجاه بالحل نحو الإمكانية ومن ثم فإن النموذج الأصلى لن يكون له حل ممكن .

٣ – إذا كان هناك بعض المتغيرات غير الأساسية لها معاملات تساوى صفر فى صف دالة الهدف ، Z ، فإنه يمكن تحويل هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية ولكن دون أن تتغير قيمة دالة الهدف ، وهذا يعنى أن هناك عدة حلول للنموذج الأصلى .

لذلك فلكى يكون هناك حل أمثــل وحيــد للنمــوذج يشــترط أن تكون كافة معاملات المتغيرات غــــير الأساســية فـــى صـــف دالـــة الهدف سالبة فى حالة إيجاد الحـــد الأقصـــى لدالـــة الـــهدف وموجبـــة فى حالة إيجاد الحد الأدنى لدالـــة الـــهدف .

فإذا كانت إحدى جولات الحل لأحد نمـــاذج البرمجـــة الخطيـــة والمطلوب فيه Max Z هـــى كالتـــالى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	0	- 1	1	3	0	15
x_1	1	3	0	5	0	30
x_5	0	2	0	4	1	12
- Z	0	0	0	- 4	0	- 50

من الجدول السابق يلاحظ أن المتغيرين غير الأساسيين هما :

$x_2 = 0$ ، $x_4 = -4$ ، فيكون الحل الحالى أمثل وهو كما يلى :

$$Z = 50 \quad , \quad x_5^* = 12 \quad , \quad x_3^* = 15 \quad , \quad x_1^* = 30$$

ولكن هذا الحل ليس هو الحـــل الأمثـــل الوحيـــد ، إذ يمكـــن اختيار المتغير غير الأساسى x_2 الذى له معــــامل يســـاوى صفـــر فى صف دالة الهدف ، Z ، كمتغير داخل ثم يتـــم اختيـــار المتغـــير

x_5 كمتغير خـــارج وفقـــا لقواعـــد طريقـــة الســـمبلكس الأساســـية وننتقل إلى الجولة التاليـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	0	0	1	5	0.5	21
x_1	1	0	0	- 1	1.5	12
x_2	0	1	0	2	0.5	6
- Z	0	0	0	- 4	0	- 50

والحل الحالى هو أيضا حـــل أمثـــل آخـــر للنمـــوذج ولكـــن بنفس القيمة لدالة الهدف وهو كمـــا يلـــى :

$$Z = 50 \quad , \quad x_3^* = 21 \quad , \quad x_2^* = 6 \quad , \quad x_1^* = 12$$

٤ – التعادل عند اختيار المتغيرات الداخلة والخارجة

أ – عند تطبيق طريقة السمبلكس الأساسية .

أولا : التعادل عند اختيار المتغير الداخل

عند تحديد المتغير الداخل فى إحـــدى جـــولات الحـــل يتـــم اختيـــار المتغير الذى له أكبر معامل موجب فـــى صـــف دالـــة الـــهدف ، Z ، فـــى حالة الحد الأقصى لدالة الهدف والمتغير الذى له أقـــل معـــامل فـــى صـــف دالة الهدف ، Z ، فى حالة الحد الأدنى لدالـــة الـــهدف .

وعند تعادل متغيرين أو أكثر فى هـذا المعيـار فـلا توجـد قـاعدة تشير إلى الاختيارات التى تؤدى إلى الحـل الأمثـل بشـكل أسـرع ويتـم الاختيار فى هذه الحالة بطريقـة عشـوائية .

فإذا كانت دالة الهدف ، مثلاً هـى :

$$Z = 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 2x_4$$

فيمكن اختيار أى من x_1 , x_2 ، علـى السـواء ، كمتغـير داخـل إذا كان المطلوب هـو : Max Z

ويمكن اختيار أى من x_3 , x_4 ، علـى الـسواء كمتغـير داخـل إذا كان المطلوب هـو : Min Z

ثانيا : التعادل عند اختيار المتغير الخارج

قد يحدث التعادل عند اختيـار المتغـير الخـارج بتسـاوى نسـبتين أو أكثر عند مستوى أقل خارج قسمة للثوابـت علـى العنـاصر المنـاظرة لها فى العمود المحورى ، وهذا يعنى أن أكثر مـن متغـير أساسـى يصـل إلى صفر فى وقت واحد بزيادة المتغير الداخل الجديـد . ولمـا كـان مـن المتعذر إخراج أكثر من متغير واحد فى الجولة الواحـدة مـن الحـل فـإن باقى المتغيرات المتساوية معه تظل عند مسـتوى الصفـر .

ولكن قواعد طريقة السمبلكس تقتضـى أن يكـون عـدد المتغـيرات الموجبة فى الحل مساوياً لعـدد القيـود الهيكليـة ، m ، وأن يكـون عـدد المتغيرات الصفرية مسـاوياً للفـرق بيـن عـدد المتغـيرات ، n ، وعـدد القيود m ، أى مساوياً لـ (n – m) . وفـى حالـة تعـادل أكـثر مـن

متغير خارج فإن عدد المتغيرات غير الصفرية يقل عن عدد القيود ، m ، وهذه الحالة تسمى بالإنتكاس فى الحل degeneracy .

ويمكن الخروج من حالات الانتكاس فى الحل باستخدام قاعدة شارنز وكوبر Charnes & Cooper كما يلى :

- تحديد المتغيرات الأساسية المتعادلة التى تقابل أقل خارج قسمة للثوابت على عناصر العمود المحورى وذلك حتى يمكن تحديد الصفوف المحورية المرشحة .
- البدء بأول عمود من مصفوفة الوحدة على يسار العمود المحورى الداخل ويتم إيجاد خارج قسمة عناصر هذا العمود فى الصفوف المحورية المرشحة والعناصر المقابلة لها فى العمود المحورى .
- إذا تم التوصل إلى نسب غير متساوية فإنه يمكن فض التعادل باختيار المتغير المقابل للنسبة الأقل . أما إذا كانت النسب مازالت متساوية فإنه يمكن الإنتقال إلى العمود التالى على اليسار من مصفوفة الوحدة ، وهكذا حتى يتم التوصل إلى نسب متفاوتة ويختار المتغير المقابل للنسبة الأقل كمتغير خارج .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا الحل المبدئى التالى وكان المطلوب هو Max Z :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	1	0	1	0	0	4
x_4	0	1	0	1	0	6
x_5	3	2	0	0	1	12
$-Z$	3	5	0	0	0	0

المتغير الداخل فى هذه الحالة هو x_2 ويكون عمود x_2 هو العمود المحورى ولتحديد المتغير الخارج يتم قسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود المحورى حيث :

$$12 \div 2 = 6 \quad , \quad 6 \div 1 = 6$$

ففى هذه الحالة يكون المتغيران المرشحان للخروج هما x_4 , x_5 ، ولفض هذا التعادل يتم قسمة عناصر العمود الأول من مصفوفة الوحدة (أى عمود x_3) الواقعة فى الصفوف المحورية المرشحة وهما صفر ، صفر على العناصر المقابلة فى العمود المحورى وهما : 2, 1 ، نحصل على :

$$0 \div 2 = 0 \quad , \quad 0 \div 1 = 0$$

وبالتالى لا يمكن فض التعادل بين المتغيرين المرشحين ، لذلك ننتقل إلى العمود التالى من مصفوفة الوحدة على اليسار وهو عمود x_4 وتكون العناصر هى : صفر ، واحد والنسب المقابلة للصفوف المحورية المرشحة هى :

صف x_4 : $1 \div 1 = 1$ ، صف x_5 : $0 \div 2 = 0$

وبالتالى يمكن اختيار المتغير x_5 كمتغير خارج لمقابلته للنسبة الأقل .

ب – عند تطبيق طريقة مبدول السمبلكس

أولا : التعادل عند اختيار المتغير الخارج

عند تحديد المتغير الخارج فى إحدى جولات الحل يتم اختيار المتغير الذى له أكبر معامل سالب فى عمود الثوابت (ويستوى فى ذلك الحد الأقصى والحد الأدنى لدالة الهدف Z) .

وعند تعادل متغيرين أو أكثر فى هذا المعيار فلا توجد قاعدة تشير إلى الاختيارات التى تؤدى إلى الحل المسموح به بشكل أسرع ويتم الاختيار فى هذه الحالة بطريقة عشوائية .

ثانيا : التعادل عند اختيار المتغير الداخل

قد يحدث التعادل عند اختيار المتغير الداخل بتساوى نسبتين أو أكثر عند مستوى أقل خارج قسمة لمعاملات صف دالة الهدف على المعاملات المناظرة لها بالصف المحورى السالبة فقط . وفى هذه الحالة فلا توجد قاعدة تشير إلى الاختيارات التى تؤدى إلى الحل المسموح به بشكل أسرع ويتم الاختيار أيضاً فى هذه الحالة بطريقة عشوائية .

(١ – ٥) مبدول نموذج البرمجة الخطية :

Dual of Linear Programming Model

إذا كان لدينا مشكلة أصلية مصاغة في صورة برنامج خطي فإنه يقترن بها مشكلة أخرى تمثل الوجه الآخر للمشكلة الأصلية ويمكن صياغة نموذج لها يسمى مبدول النموذج الأصلي .

فإذا كان نموذج البرنامج الخطي للمشكلة الأصلية في الصورة التالية :

$$\text{Maximize } Z = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n$$

بشرط أن :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le c_m$$

$$x_i \ge 0 \;, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

فإن مبدول هذا النموذج يصاغ على النحو التالى :

$$\text{Minimize } Z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

بشرط أن :

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \ge t_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \ge t_2$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}\ y_1 + a_{2n}\ y_2 + \ldots + a_{mn}\ y_m \geq t_n$$
$$y_i \geq 0\ , \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ومن ثم فإن العلاقة بين النموذج الأصلي ونموذج المبدول تتحدد كالآتي :

١ - إذا كان النموذج الأصلي يتكون من n من المتغيرات ، m من القيود الهيكلية ، فإن نموذج المبدول سوف يتكون من m من المتغيرات ، n من القيود الهيكلية .

٢ - إذا كان اتجاه دالة الهدف ، Z ، في النموذج الأصلي " حد أقصى " فإنه يتحول في نموذج المبدول إلى " حد أدنى " والعكس بالعكس .

٣ - إذا كانت دالة الهدف ، Z ، في النموذج الأصلي " حد أقصى " فإن متباينات القيود الهيكلية ينبغي أن تكون جميعها على صورة أصغر من أو يساوي ثم تتحول في نموذج المبدول إلى صورة أكبر من أو يساوي . أما إذا كانت بعض متباينات النموذج الأصلي في صورة أكبر من أو يساوي فينبغي تحويلها إلى صورة أصغر من أو يساوي عن طريق ضرب طرفي المتباينة في (1 -) حتى يمكن إيجاد نموذج المبدول .

أما إذا كانت دالة الهدف ، Z ، في النموذج الأصلي " حد أدنى " فإن متباينات القيود الهيكلية ينبغي أن تكون جميعها على صورة أكبر من أو يساوي ثم تتحول في نموذج المبدول إلى صورة أصغر من أو يساوي . أما إذا كانت بعض متباينات

النموذج الأصلي في صورة أصغر من أو يساوي فينبغي تحويلها إلى صورة أكبر من أو يساوي عن طريق ضرب طرفي المتباينة في (1 -) حتى يمكن إيجاد نموذج المبدول .

٤ – إذا كانت بعض القيود الهيكلية في النموذج الأصلي على شكل معادلات فإنه ينبغي تحويل كل معادلة إلى متباينتين إحداهما على صورة أصغر من أو تساوي والأخرى على صورة أكبر من أو تساوي ثم نضرب طرفي المتباينة الثانية في (1 -) في حالة الحد الأقصى لدالة الهدف في النموذج الأصلي لتتحول إلى صورة أصغر من أو يساوي ، أو نضرب طرفي المتباينة الأولى في (1 -) في حالة الحد الأدنى لدالة الهدف في النموذج الأصلي لتتحول إلى صورة أكبر من أو يساوي .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا القيد التالي في النموذج الأصلي والذي فيه Max Z :

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n\ =\ c_1$$

فعند إيجاد نموذج المبدول ينبغي تحويل هذا القيد إلى قيدين أحدهما على صورة $\leq$ والأخر على صورة $\geq$ كما يلي :

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n\ \leq\ c_1$$

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n\ \geq\ c_1$$

ثم يترك القيد الأول على صورة $\leq$ كما هو ويضرب طرفي القيد الثاني في (1 -) ليتحول إلى صورة $\leq$ كما يلي :

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + \dots + a_{in}\ x_n\ \leq\ c_i$$

$$-\ a_{i1}\ x_1 - a_{i2}\ x_2\ - \dots\ - a_{in}\ x_n\ \leq\ -\ c_i$$

٥ – تتحول معاملات المتغيرات القرارية فى دالـــة الـهدف فـى النمــوذج الأصلى ، أى t_i ، $(i = 1, 2, \dots , n)$ إلى ثوابــت لقيــود نمــوذج المبـدول .

٦ – تتحـول ثوابـت القيــود الهيكليــة بالنمــوذج الأصلـــى ، أى c_i ، $(i = 1, 2, \dots , m)$ إلــى معــاملات المتغــيرات القراريــة ، y_i ، فى دالة الهدف فى نمــوذج المبــدول .

٧ – تخضع المتغيرات القراريـــة فـــى أى مــن النموذجيــن لقيــود عــدم السلبية .

ويمكن حل نموذج المبدول بنفس طريقـــة حــل النمــوذج الأصلــى ، ويعطى الحل الأمثل لنموذج المبدول معلومات كاملـــة عــن الحــل الأمثــل للنموذج الأصلى والعكس صحيح ، فمن الحــل الأمثــل للنمــوذج الأصلــى يمكن اشتقاق الحل الأمثل لنموذج المبدول علــى النحــو التــالى :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

حيث تشير n إلى عدد المتغيرات القرارية فـــى النمــوذج الأصلــى .

ويلاحظ أنه فى حالة وجود قيم موجبة فـــى الحــل النــهائى للمتغــير المتمم فـــى أحــد القيــود الهيكليــة للنمــوذج الأصلــى (أى أنــه ضمــن المتغيرات الأساسية فى الحل الأمثل) فــإن المتغــير المقــابل لــهذا القيــد فى المبدول يساوى صفر ، أمـــا إذا كــانت قيمــة المتغــير المتمــم لأحــد

القيود الهيكلية فى النموذج الأصلى منه تساوى صفر (أى أنه ضمن المتغيرات غير الأساسية) فإن المتغير المقابل لهذا القيد فى نموذج المبدول سيكون موجبا ، أى أن :

$$y_j^* = 0 \quad \text{إذا كان} \quad x_{n+j}^* > 0$$

كما أن

$$y_j^* > 0 \quad \text{إذا كان} \quad x_{n+j}^* = 0$$

ويفيد اشتقاق نموذج المبدول وحله إذا كان النموذج الأصلى يتكون من عدد كبير من القيود الهيكلية وعدد أقل من المتغيرات ، ففى هذه الحالة يفضل إيجاد وحل نموذج المبدول بدلا من حل النموذج الأصلى ، لأن نموذج المبدول فى هذه الحالة سوف يتضمن عدد كبير من المتغيرات وعدد أقل من القيود الهيكلية . ولعل السبب فى ذلك هو أن عدد جولات حل النموذج الخطى بطريقة السمبلكس تكون دالة فى عدد القيود الهيكلية . فقد وجد فى معظم الحالات العملية أن عدد جولات الحل يتراوح عادة ما بين 1.5 – 3 مرات عدد القيود الهيكلية، m ، فى النموذج .

ويمكن تلخيص العلاقة بين النموذج الأصلى ونمـــوذج المبــدول فـــى الجدول التـــالى :

نموذج المبــدول	النموذج الأصلـــى
دالة الــهدف : Min Z Max Z	دالة الــهدف : Max Z Min Z
ثوابت القيود الهيكليـــة	معاملات دالة الـــهدف
معاملات دالة الـــهدف	ثوابت القيود الهيكليـــة
معاملات القيد المقابل للمتغير x_i	معاملات المتغـير x_i
معاملات المتغير المقابل للقيد x_j	معاملات القيــد j
القيود الهيكلية على صـــورة ≥	القيود الهيكلية على صـــورة ≤
على صـــورة ≤	على صـــورة ≥
المتغير المقابل للقيـد j ≥ 0	القيد j على شكل متباينـــة
المتغير المقابل للقيد j غير مقيد الإشارة	القيد j على شكل معادلـــة

مثـــال (٩) :

فى النموذج الخطى التـــالى :

$$Min\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

بشـروط أن :

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_2 - x_3 \geq 4$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

المطلوب :

١ – حل النموذج السابق مستخدما طريقة السمبلكس .

٢ – اشتقاق نموذج المبدول للنموذج الأصلي واشتقاق الحل الأمثل لنموذج المبدول من الحل الأمثل للنموذج الأصلي .

الحل :

١ – نضرب طرفي كل من القيدين الأول والثالث في (1 -) لتحويل كل منهما إلى صورة $\leq$ كما يلي :

$$-2x_1 + x_2 - x_3 \leq -8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_2 - x_3 \leq -4$$

ثم نضيف متغير متمم لكل قيد لتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلي :

$$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 12$$

$$-x_2 + x_3 + x_6 = -4$$

بظهور قيم سالبة في ثوابت القيود فسوف تستخدم طريقة مبدول السمبلكس ويكون جدول الحل المبدئي هو :

الجولة الأولـــــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	-2	1	-1	1	0	0	-8
x_5	1	1	2	0	1	0	12
x_6	0	-1	1	0	0	1	-4
-Z	1	2	3	0	0	0	0

يتم اختيار المتغير x_4 كمتغير خـــارج لأن لـــه أكـــبر قيمـــة ســـالبة فى عمود الثوابت ويكون صــــف x_4 هـــو الصــــف المحـــورى ولتحديــد المتغير الداخل يتم قسمة عناصر صـــف (Z -) علـــى العنـــاصر المنـــاظرة لها السالبة فقط بالصف المحورى كمـــا يلـــى :

$$3 \div (-1) = -3 \quad , \quad 1 \div (-2) = -\frac{1}{2}$$

بتجاهل إشارة خارج القسمة فيكون المتغــــير المنـــاظر لأقـــل خـــارج قسمة هو x_1 ويكـــون صـــف x_1 هـــو الصــــف المحـــورى . بتطبيـــق القواعد التحويلية ننتقل إلى الجولـــة التاليـــة .

الجولة الثانيــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_1	1	- 0.5	0.5	- 0.5	0	0	4
x_5	0	1.5	1.5	0.5	1	0	4
x_6	0	- 1	1	0	0	1	- 4
- Z	0	2.5	2.5	0.5	0	0	- 4

يتم اختيار المتغير x_6 كمتغير خــارج لأن لــه أكــبر قيمــة ســالبة فى عمود الثوابت ويكون صــف x_6 هــو الصــف المحــورى وبتطبيــق نفس القواعد السابقة لتحديد المتغــير الداخــل ســيكون المتغــير x_2 هــو المتغير الداخــل ويكون عمود x_2 هو العمـــود المحــورى وننتقــل إلــى الجولة التاليــة :

الجولة الثالثــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_1	1	1	0	- 0.5	0	0.5	6
x_5	0	0	3	0.5	1	1.5	2
x_2	0	0	- 1	0	0	- 1	4
- Z	0	0	5	0.5	0	2.5	- 14

وحيث أن القيم الموجـــودة بعمـــود الثوابـــت فـــى الجـــدول الأخـــير أصبحت كلها موجبة فيكون الحل الحالى مسموحا بـــه ونبحـــث بعـــد ذلـــك عن الأمثليـــة .

اختبار الأمثليـــة :

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول الســـابق يلاحـــظ أن المتغـــيرات غير الأساسية هى : x_6 , x_4 , x_3 لـــها معـــاملات موجـــبة فـــى صـــف دالة الهدف ، (Z -) ، وحيث أن المطلـــوب هـــو تصغـــير دالـــة الـــهدف فيكون الحل الحالى أمثل وهو على النحـــو التـــالى :

$$Z = 14 \quad , \quad x_5^* = 2 \quad , \quad x_2^* = 4 \quad , \quad x_1^* = 6$$

٢ - لإشتقاق نموذج المبدول للنموذج الأصلـــى ، حيـــث أن دالـــة الـــهدف فى النموذج الأصلـــى هـــى : Min Z فينبغـــى أن نجعـــل القيـــود الهيكلية فى النموذج الأصلى جميعـــها علـــى صـــورة أكـــبر مـــن أو يساوى فتصبح القيود الهيكلية كمـــا يلـــى :

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -12$$

$$x_2 - x_3 \geq 4$$

ويكون نموذج المبدول علـــى الصـــورة :

$$\text{Max } Z = 8y_1 - 12y_2 + 4y_3$$

بشـوط أن :

$$2y_1 - y_2 \leq 1$$
$$-y_1 - y_2 + y_3 \leq 2$$
$$y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 3$$
$$y_j \geq 0 \quad , \quad (j = 1, 2, 3)$$

من الحل الأمثل للنمـــوذج الأصلـــى يمكـــن اشـــتقاق الحـــل الأمثـــل لنموذج المبدول على النحو التـــالى :

حيـث أن :

$$y_j^* = x_{n+j}$$
$$y_1^* = x_4 = 0.5$$
$$y_2^* = x_5 = 0$$
$$y_3^* = x_6 = 2.5$$
$$y_4^* = x_1 = 0$$
$$y_5^* = x_2 = 0$$
$$y_6^* = x_3 = 5$$
$$Z = 14$$

وبالتالى يكون الحل الأمثل لنموذج المبـــدول هـــو :

$$Z = 14 \quad , \quad y_6^* = 5 \quad , \quad y_3^* = 2.5 \quad , \quad y_1^* = 0.5$$

(١ - ٦) تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

إذا كان لدينا البرنامج الخطى التالى :

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n} t_i\ x_i$$

بشروط أن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\ x_i \le c_j \qquad (j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

$$x_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

فإن معاملات دالة الهدف t_i (حيث : $i = 1, 2, 3, \dots, n$) وثوابت القيود c_j (حيث : $j = 1, 2, 3, \dots, m$) ومعاملات القيود الهيكلية a_{ji} (حيث : $i = 1, 2, \dots, n$ & $j = 1, 2, \dots, m$) تعد من معالم النموذج .

وبعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج قد تطرأ بعض التغيرات على هذه المعالم ويكون المطلوب هو معرفة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للنموذج ، ولا يتطلب الأمر إعادة حل النموذج من جديد بل يكتفى والحالة هذه باختبار حساسية الحل الأمثل فى ظل الظروف الجديدة للنموذج و هو ما يعرف بتحليل الحساسية .

وسوف نتناول تحليل الحساسية عندما تكون دالة الهدف ، Z ، حد أقصى ، أى فى الحالة Max Z ، وذلك فى الحالات الآتية :

١ – التغير فى معاملات دالة الـــهدف .

٢ – التغير فى ثوابت القيـــود .

٣ – التغير فى معاملات القيـــود الهيكليـــة .

٤ – إضافة قيد هيكلى جديـــد .

٥ – إضافة متغير جديـــد .

وسوف نقتصر هنا على دراسة الحالات التـــى يحـــدث فيـــها واحـــد فقط من التغيرات الخمس المشار إليـــها بـــالنموذج ، أمـــا الحـــالات التـــى يحدث فيها تغيرين أو أكثر بالنموذج فى نفس الوقـــت فإنـــها تخـــرج عـــن نطاق هذا المؤلـــف .

أولا : التغير فى معاملات دالة الهدف

رأينـــا فيمـــا سبـــق أن معاملات صف دالـــة الـــهدف ، أى صـــف (Z -) ، فى جدول الحل لأى جولة من جولات الحـــل تشـــير إلـــى الأثـــر المحتمل على قيمة دالة الـــهدف فـــى حالـــة اختيـــار أى مـــن المتغـــيرات المختلفة كمتغير داخل فى جولة تالية للحـــل ، لذلـــك فـــإن اختبـــار مـــدى تأثير التغير فى معاملات دالة الهدف على الحـــل الأمثـــل ســـوف يختلـــف باختلاف ما إذا كانت هذه التغيرات تتعلق بمتغير أساســـى أم متغـــير غـــير أساسى فى الحل الأمثـــل .

أ – التغير فى معاملات المتغيرات غير الأساسية :

رأينا أنه فى حالة مشـــاكل التعظيـــم لدالـــة الـــهدف فـــإن معـــاملات المتغيرات غير الأساسية فى صف (Z -) بجدول الحـــل الأمثـــل ينبغـــى

أن تكون سالبة (أو صفر ، وذلك في حالة تعدد الحلول المثلى) ، لذلك فإذا كان التغير في معاملات دالة الهدف يؤدى إلى ظهور قيم موجبة في صف معاملات دالة الهدف في الجولة النهائية فيعني ذلك أن الحل الحالي لم يعد أمثل ويمكن الاستمرار في جولات تالية لتحسين الحل ، أما إذا كان التغير لا يؤدى إلى ظهور قيم موجبة فإن الحل يظل حلاً أمثل . ومن ثم يمكن استنتاج القاعدة التالية :

١ – أي نقص في معاملات دالة الهدف الأصلية يظل معه الحل أمثل وذلك لأن هذا يؤدى إلى زيادة المستوى السالب للمعاملات في صف (Z -) في الجولة النهائية للحل .

٢ – زيادة معاملات دالة الهدف بمقدار يقل عن (أو يتعادل مع) المعامل السالب في صف (Z -) في الجولة النهائية للحل سوف يظل معه الحل أمثل دون تعديل .

٣ – زيادة معاملات دالة الهدف بمقدار يزيد عن المعامل السالب في صف (Z -) في الجولة النهائية للحل ، سوف يفقد الحل الأصلي أمثليته حيث يترتب على ذلك ظهور قيمة موجبة للمعامل في صف (Z -) في الجولة النهائية وهذا يعني أن هناك إمكانية لاختيار هذا المتغير كمتغير داخل والاستمرار في جولات تالية للوصول إلى الحل الأمثل الجديد .

ويعني ذلك أن قيمة معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف الأخير ، أي صف (Z -) ، من الحل الأمثل (بإشارة مخالفة)

تمثل أقصى زيادة ممكنة في معاملات دالة الهدف الأصلية دون أن يطرأ تغيير على الحل الأمثل المتحصل عليه .

ب – التغير في معاملات المتغيرات الأساسية :

رأينا أن معاملات المتغيرات الأساسية في الصف الأخير من جدول السمبلكس ينبغي أن تكون مساوية أصفار وبحدوث أى تغير في هذه المعاملات في دالة الهدف الأصلية فإنها لن تصبح مساوية أصفار في جدول الحل الأمثل النهائي ولكي تساوى هذه المعاملات أصفار مرة أخرى يتم ضرب عناصر الصف الذى يقابل المتغير الأساسي في جدول الحل النهائي في مقدار التغير في معامل دالة الهدف والذى نشير إليه بالرمز h ثم نطرح الناتج من الصف الأخير ، أى صف (Z -) بعد إدخال التعديل عليه وذلك حتى يمكن استعادة الصفر كمعامل للمتغير الأساسي ، ويتم اختبار الحل الأمثل في ظل الموقف الجديد .

فإذا كانت كافة المعاملات في صف (Z -) سالبة أو مساوية للصفر فإن الحل يظل أمثل ولا يقبل التحسين ، أما إذا ظهرت معاملات موجبة في صف (Z -) فإن الحل النهائي يفقد أمثليته ويمكن الاستمرار في جولات إضافية حتى نحصل على الحل الأمثل الجديد .

وسوف نوضح العرض السابق من خلال المثال التالي :

مثــال (١٠) :

أعتبر النموذج الخطى التــالى :

$$Max\ Z = 10\ x_1 + 3\ x_2 + 8.5\ x_3$$

بشــرط أن :

$$3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \le 21$$
$$4\,x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 \le 20$$
$$2\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 \le 12$$
$$x_i \ge 0 \ , \quad (i = 1, 2, 3)$$

المطلوب :

١ – إيجاد الحل الأمثل للنموذج مســتخدما طريقــة الســمبلكس .

٢ – اختبار حساســية الحــل الأمثــل إذا حدثــت التغــيرات التاليــة فــى معاملات دالة الــهدف :

أ – نقص معامل x_1 بدالة الــهدف بمقــدار 3 .

ب – تغير معامل x_2 بدالة الهدف مــن 3 إلــى 4.5 .

٣ – تحديد نطاق التغير فى معــامل كــل مــن x_1 , x_3 بدالــة الــهدف والذى يظل معه الحل أمثــل .

الحــل :

١ – نحول المتباينات إلى معادلات بإضافة متغير متمم لكل قيد كما يلى :

$$3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 21$$
$$4\,x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 + x_5 = 20$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad + x_6 = 12$$

تستمر جولات الحل كما يلـــى :

الجولة الأولـــــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	3	2	1	1	0	0	21
x_5	4	2	5	0	1	0	20
x_6	2	5	1	0	0	1	12
- Z	10	3	8.5	0	0	0	0

حيث أن المعـــامل 10 فـــى صـــف (Z -) هـــو أكـــبر معـــامل موجب فيكون المتغير x_1 هو المتغير الداخـــل ويكـــون عمـــود x_1 هـــو العمود المحـــورى ، ولتحديـــد المتغـــير الخـــارج نقســـم عنـــاصر عمـــود الثوابت على العناصر المناظرة لها فـــى العمـــود المحـــورى ذات الإشـــارة الموجبة فيكون المتغير ذو النسبة الأقـــل هـــو x_5 ويكـــون هـــو المتغـــير الخارج وصفه هو الصف المحورى وننتقل إلـــى الجولـــة التاليـــة .

الجولة الثانيـــــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	0	0.5	- 2.75	1	- 0.75	0	6
x_1	1	0.5	1.25	0	0.25	0	5
x_6	0	4	- 1.5	0	- 0.5	1	2
- Z	0	- 2	- 4	0	- 2.5	0	- 50

وحيث أن المتغيرات غير الأساســية وهــى : x_2 , x_3 , x_5 لــها معاملات سالبة فى الصـــــف الأخــير بــالجدول المســابق ، فيكــون الحــل الحالى أمثل وهو كالتـــالى :

$$Z = 50 \quad , \quad x_6^* = 2 \quad , \quad x_4^* = 6 \quad , \quad x_1^* = 5$$

٢ – أ – لاختبار حساســية الحــل الأمثــل إذا نقــص معــامل x_1 بدالــة الهدف بمقدار 3 ، نلاحــظ أن x_1 متغــير أساســى وقيمــة التغــير فى معامل x_1 هــو 3 - .

صف x_1 مضروبا فى عكس التغير (أى مضروبا فى (3)) :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_1	3	1.5	3.75	0	0.75	0	15

صف (Z -) بعد إدخال التغــير

- Z	- 3	- 2	- 4	0	- 2.5	0	- 50

بالجمع ، نحصل على صف (Z -) الجديد كما يلى :

- Z	0	- 0.5	- 0.25	0	- 1.75	0	- 35

وحيث أن المتغيرات غير الأساسية مازال لها معاملات سالبة فى صف (Z -) الجديد فيظل الحل أمثل وإن تغيرت قيمة دالة الهدف من 50 إلى 35 .

ب – فى حالة زيادة معامل x_2 بدالة الهدف من 3 إلى 4.5 أى بمقدار 1.5 : فمن المعلوم أن نقص معامل x_2 بدالة الهدف يعنى الاتجاه نحو السالب بشكل أكثر فى معامل x_2 بصف دالة الهدف وبالتالى لا يوجد حد أدنى للتغير ويظل الحل أمثل كلما نقص معامل x_2 بدالة الهدف كمتغير أساسى .

أما إذا زاد معامل x_2 بمقدار 1.5 سيصبح معامل x_2 بصف دالة الهدف فى جدول الحل الأمثل هو :

$$- 2 + 1.5 = - 0.5$$

وحيث أن معامل x_2 مازال سالباً فيظل الحل الحالى أمثل كما هو .

أما إذا تغير معامل x_2 بدالة الهدف من 3 إلى 5 ، مثلا ، أى زاد بمقدار 2 ، ففى هذه الحالة سيصبح معامل x_2 فى صف دالة الهدف ، (Z -) بجدول الحل الأمثل هو :

$$- 2 + 2 = 0$$

ويظل الحل الحالى أمثل ، إلا أن المشكلة تتحول إلى حالة حلول مثلى متعددة نظراً لوجود متغير غير أساسى معامله يساوى صفر فى صف $(-Z)$.

أما إذا تغير معامل x_2 بدالة الهدف ، مثلاً ، من 3 إلى 6 أى زاد بمقدار 3 ، فإن معامل x_2 فى صف دالة الهدف بجدول الحل الأمثل هو :

$$-2 + 3 = 1$$

أى سيتغير المعامل من القيمة السالبة إلى القيمة الموجبة وبالتالى فإن الحل الأمثل الحالى يفقد أمثليته ويكون هناك إمكانية لتحسين الحل، ويتم اختيار x_2 حينئذ كمتغير داخل فى جولة تالية .

يتضح لنا أن نطاق التغير فى معامل x_2 بدالة الهدف (وهو متغير غير أساسى) الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير هو :

الحد الأدنى : لا يوجد

الحد الأعلى = 2

٣ – لتحديد نطاق التغير فى معامل x_3 بدالة الهدف الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير ، نلاحظ أن x_3 متغير غير أساسى ، ومن ثم فإن :

الحد الأدنى لنطاق التغير : لا يوجد حد أدنى

الحد الأعلى لنطاق التغير = 4

إذن :

$4 \leq$ نطاق التغير فى معامل x_3 بدالـــة الـــهدف $\leq \infty -$

لتحديد نطاق التغير فى معـــامل x_1 بدالـــة الـــهدف الـــذى يظـــل معه الحل أمثل دون تغيير ، نلاحـــظ أن x_1 متغـــير أساســـى .

نفرض أن قيمة التغير فـــى معـــامل x_1 بدالـــة الـــهدف هـــو h ، صف x_1 مضروبا فى عكس التغير (أى مضروبـــا فـــى h -) هـــو :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$-h$	$-0.5h$	$-1.25h$	0	$-0.25h$	0

صف $(Z -)$ بعد إدخال التغـــير :

$-Z$	h	-2	-4	0	-2.5	0

بجمع العناصر المتناظرة فـــى الصفيـــن نحصـــل علـــى صـــف $(Z -)$ الجديد وهـــو :

$-Z$	0	$(-0.5h-2)$	$(-1.25h-4)$	0	$(-0.25h-2.5)$	0

من عمود x_2 ينتـــج أن :

$$-0.5\ h - 2 = 0$$

إذن :

$$h = -4$$

من عمود x_3 ينتـــج أن :

$$-1.25\ h - 4 = 0$$

إذن : $h = -3.2$

من عمود x_5 ينتــج أن :

$$-0.25 \quad h - 2.5 = 0$$

إذن : $h = -10$

وسوف يتم اختيار أصغر قيمــة لـــ h بإشــارة ســالبة لتكــون الحد الأدنى لنطاق التغير فيكـــون :

الحــد الأدنـــى لنطـــاق التغيــر فـــى معـــامل x_1 بدالـــة الـــهدف = 3.2 - وحيث أنه لا توجـــد قيـم موجبــة للمتغــير h فيكــون الحـــد الأعلى لنطاق التغير غــير موجــود ، إذن :

الحد الأعلى لنطاق التغير فى معــامل x_1 بدالـــة الـــهدف = ∞

ومن ثم فــإن :

$$-3.2 \le h \le \infty .$$

ثانياً : التغير فى ثوابت القيود الهيكلية

التغير فى ثوابت القيود الهيكلية يتوقف تـــأثيره علـــى مـــدى اســتنفاذ كمياتها في الحل الأمثل ، فإذا لم تكـــن كميـــة المـــوارد مســتنفذة بالكـــامل فإن هذا يعنى أن المتغير المتمم فى القيد موضع التغيير لـــــه قيمـــة موجبـــة كمتغير أساسى كما تكون قيمة هذا المتغير المتمم فى صـــــف دالـــة الـــهدف يساوى صفر فى جولة الحل الأمثل ،ومن ثم فـــإن أى زيــادة فـــى ثــابت مثل هذا القيد لن يكون لها أى تأثير على قيمـــة دالـــة الـــهدف فـــى الحـــل

الأمثل، وتنطبق نفس الحالة فى حالة نقص ثابت هذا القيد ولكن إذا تجاوز النقص قيمة المتغير المتمم للقيد فى الحل الأمثل فإن هذا سيؤدى إلى ظهور قيمة سالبة فى عمود الثوابت ومن ثم يؤدى إلى عدم إمكانية الحل ويتم الإستمرار حينئذ فى جولات إضافية للحل بموجب طريقة مبدول السمبلكس حتى يتم الحصول على حل مسموحاً به أو ممكناً .

أما إذا كانت كمية الموارد بأحد القيود مستنفذه بالكامل فى الحل الأمثل والتى يكون المتغير المتمم لهذا القيد ضمن المتغيرات غير الأساسية أى تساوى صفر ولها معامل موجب فى صف دالة الهدف ، فإن أى تغير فى ثابت هذا القيد سوف يؤدى حتماً إلى تغير مواز فى قيمة دالة الهدف وليس بالضرورة فى الحل الأمثل .

وللتعرف على مدى أثر هذا التغير لثابت قيد معين نضرب معاملات عمود المتغير المتمم لهذا القيد فى جدول الحل الأمثل فى قيمة التغير ثم نجمع الناتج على عناصر عمود الثوابت فى جدول الحل الأمثل ، فينتج عمود جديد للثوابت ، فإذا ظهرت قيمة (أو قيم) سالبة فى هذا العمود الجديد فيتعين الاستمرار فى جولات إضافية وفقا لطريقة مبدول السمبلكس للحصول على حل مسموح به ، أما إذا لم تظهر قيم سالبة فى عمود الثوابت الجديد فيعنى ذلك أن الحل الحالى مازال أمثل .

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير ، حيث يتم ضرب عناصر عمود

معاملات المتغير المتمم للقيد فى جدول الحـــل الأمثـــل فـــى قيمـــة التغـــير والذى نفترض أنـــها تســـاوى h ، ثـــم نجمـــع النـــاتج علـــى العنـــاصر المناظرة لها فى عمود الثوابت فى جـــدول الحـــل الأمثـــل ونســـاوى القيـــم الناتجة بالصفر ، وبحل المعادلات الناتجة يتـــم الحصـــول علـــى قيمـــة (أو عدة قيم) للمتغير h والتى نحدد بها نطاق التغير فـــى ثـــابت هـــذا القـــيد الذى يظل معه الحل أمثل دون تغيـــير .

مثـــال (١١) :

اعتبر مثـــال (١٠)

المطلوب : اختبار حساسية الحل الأمثل فـــى الحـــالات الآتيـــة :

١ – زيادة ثابت القيد الثانى مـــن 20 إلـــى 26 .

٢ – نقص ثابت القيد الثالث مـــن 12 إلـــى 10.5 .

٣ – تحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الثـــانى الـــذى يظـــل معـــه الحـــل أمثل دون تغيـــير .

الحـــل :

١ – فى حالة زيادة ثابت القيد الثانى مـــن 20 إلـــى 26 :

يلاحظ أن متمم القيد الثانى هـــو المتغـــير x_5 ، وللتعـــرف علـــى أثر زيادة ثابت هذا القيد بمقـــدار 6 وحـــدات نضـــرب عنـــاصر عمـــود معاملات المتغير المتمم ، x_5 ، فـــى جـــدول الحـــل النـــهائى فـــى قيمـــة

التغير وهى 6 ونضيف الناتج إلى عمود الثوابت لنحصل على عمود الثوابت الجديد ، حيث :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير × عمود x_5
x_4	$-0.75(6) + 6 = 1.5$
x_1	$0.25(6) + 5 = 7.5$
x_6	$-0.5(6) + 2 = -1$
$-Z$	$-2.5(6) + (-50) = -65$

ونظرا لظهور قيمة سالبة فى عمود الثوابت الجديد فى صف x_6 فإن الحل يصبح فى هذه الحالة غير ممكن ويقتضى الأمر الاستمرار فى جولات إضافية وفقا لطريقة مبدول السمبلكس بعد إحلال عمود الثوابت الجديد محل عمود الثوابت الأصلى كما يلى :.

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	0	0.5	- 2.75	1	- 0.75	0	1.5
x_5	1	0.5	1.25	0	0.25	0	7.5
x_6	0	4	- 1.5	0	- 0.5	1	- 1
- Z	0	- 2	- 4	0	- 2.5	0	- 65

بترشيح المتغير x_6 كمتغير خارج ثم ترشيح المتغير x_3 كمتغير داخل يتم الانتقال إلى الجولة التالية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	0	- 6.83	0	1	0.17	- 1.83	3.33
x_1	1	8.33	0	0	- 0.37	0.83	6.67
x_3	0	- 2.67	1	0	0.33	- 0.67	0.67
- Z	0	- 10.67	0	0	- 1.17	- 2.67	- 62.33

وحيث أن عمود الثوابت الجديد أصبحت كل معاملاته موجبة فيكون الحل الحالى مسموحاً به ، ومن جهة أخرى يلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية وهى : x_2 , x_5 , x_6 لها معاملات سالبة فى صف (Z -) بالجدول الأخير ، فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل .

أى أنه فى حالة زيادة ثابت القيد الثانى من 20 إلى 26 أى بمقدار 6 وحدات يصبح لدينا حل أمثل جديد هو كالتالى :

$$Z = 62.33 \ , \ x_4^* = 3.33 \ , \ x_3^* = 0.67 \ , \ x_1^* = 6.67$$

٢ – فى حالة نقص ثابت القيد الثالث من 12 إلى 10.5 ، أى النقص بمقدار 1.5 وحدة .

يلاحظ أن متمم القيد الثالث هو المتغير x_6 ، لذا يتم ضرب عناصر عمود معاملات المتغير x_6 فى جدول الحل النهائى فى قيمة التغير (أى فى 1.5 -) ونضيف الناتج إلى عمود الثوابت فى جدول الحل النهائى كما يلى :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير × عمود x_6
x_4	$0 \times (-1.5) + 6 = 6$
x_1	$0 \times (-1.5) + 5 = 5$
x_6	$1 \times (-1.5) + 2 = 0.5$
$-Z$	$0 \times (-1.5) + (-50) = -50$

كما هو واضح فإن عمود الثوابت الجديد لم يشتمل على قيمة سالبة ، لذلك فإن مجموعة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل الأولى تظل كما هى وإن حدث بعض التعديل في قيم تلك المتغيرات على النحو التالى :

$$Z = 50 \quad , \quad x_6^* = 0.5 \quad , \quad x_4^* = 6 \quad , \quad x_1^* = 5$$

٣ - لتحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الثانى الذى يظل معه الحل أمثل ، نفرض أن قيمة التغير في ثابت القيد الثانى هو h ، وحيث أن المتغير المتمم للقيد الثانى - كما رأينا - هو x_5 ، فبضرب عناصر عمود معاملات x_5 فى جدول الحل النهائى فى h وجمع الناتج على العناصر المناظرة في عمود الثوابت في جدول الحل النهائى أيضا ثم بمساواة كل قيمة ناتجة بالصفر ، وبحل المعادلات المتحصل عليها يتم الحصول على قيمة (أو قيم) التغير h كما يلى :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير × عمود x_5		
x_4	$-0.75(h)$	$+ 6$	$= -0.75h + 6$
x_1	$0.25(h)$	$+ 5$	$= 0.25h + 5$
x_6	$-0.5(h)$	$+ 2$	$= 0.5h + 2$
$-Z$	$-2.5(h)$	$+ (-50)$	$= -2.5h - 50$

بمساواة كل من معاملات عمود الثوابت بالصفر وحل المعادلات نحصل على ما يلي:

من صف x_4 :

$$-0.75h + 6 = 0$$

إذن : $h = 8$

من صف x_1 :

$$0.25h + 5 = 0$$

إذن : $h = -20$

من صف x_6 :

$$0.5h + 2 = 0$$

إذن : $h = 4$

ويتم اختيار أصغر قيمة موجبة وأصغر قيمة بإشارة سالبة كحدين أعلى وأدنى على الترتيب لقيمة التغير h .

$$-20 \leq h \leq 4$$

ويكون الحد الأدنى الذى يمكن أن يصل إليه ثابت القيد الثانى هو :

$20 - 20 = 0$

بينما الحد الأعلى الذى يمكن أن يصل إليه ثابت القيد الثانى هو :

$20 + 4 = 24$

ففى داخل هذا النطاق يظل الحل الأمثل الأولى أمثل كما هو ، إلا أن قيمة دالة الهدف سوف تتغير بمقدار $(h\ 2.5\ -)$.

ثالثاً : التغير فى معاملات القيود الهيكلية

معاملات القيود الهيكلية a_{ij} ترتبط عموما بالمتغيرات x_i واختبار مدى تأثير التغير فى تلك المعاملات على الحل الأمثل سوف يختلف باختلاف ما إذا كانت هذه المعاملات تتعلق بمتغير أساسى أم متغير غير أساسى فى الحل الأمثل الأولى .

أ – التغير فى معاملات المتغيرات غير الأساسية

تماثل هذه الحالة التغير فى معاملات المتغيرات غير الأساسية من دالة الهدف ، والتغير فى هذه الحالة إما أن يؤدى إلى أن يظل الحل الأمثل الأولى حلاً أمثل أو أن يفقد الحل الأمثل الأولى أمثليته ولكنه يظل حلاً ممكناً .

ولاختبار حساسية الحل الأمثل فى هذه الحالة يتم ضرب عمود المتغير المتمم للقيد الذى طرأ التغير على أحد معاملاته فى قيمة هذا التغير ثم يضاف الناتج إلى عمود المتغير الذى طرأ التغير على أحد

معاملاته ، ويلاحظ قيمة المعامل الناتج فى صف دالة الهدف، (Z -) ، على النحو التالى :

١ – إذا كان المعامل الناتج فى صف دالة الهدف سالباً فإن الحل يظل هو الحل الأمثل .

٢ – إذا كان المعامل الناتج فى صف دالة الهدف يساوى صفر فإن الحل يظل هو الحل الأمثل مع وجود حل (أو حلول) لمثل آخر (مثلى أخرى) .

٣ – إذا كان المعامل الناتج فى صف دالة الهدف قد تحول إلى قيمة موجبة فإن الحل فى هذه الحالة يفقد أمثليته ولكنه يظل حلاً ممكناً، ومن ثم يمكن الاستمرار فى جولات إضافية تالية لتحسين الحل .

مثال (١٢) :

اعتبر مثال (١٠) والمطلوب هو :

١ – تحديد مدى صلاحية الحل الأمثل فى حالة تغير القيد الثانى ليصبح على الصورة :

$$4\ x_1 + 2\ \ x_2 + \ 3.6\, x_3 \ \leq\ 20$$

٢ – تحديد نطاق التغير فى معامل x_3 فى كل من القيدين الثانى والثالث والذى يظل معه الحل أمثل دون تغيير .

الحـــل :

١ – تغير معامل x_3 فى القيد الثـــانى (أى a_{23}) مــن 5 إلـــى 3.6 :
يلاحظ أن قيمة التغير فى معـــامل x_3 بـــالقيد الثـــانى هـــى (1.4 -) ، كما أن المتغير المتمم للقيـــد الثـــانى هـــو المتغـــير x_5 ، لذلك فـــإن عمود معاملات المتغير x_3 بعد التعديل ســـيكون هـــو نفـــس عمـــود المتغير فى جدول الحل الأمثل مضافـــاً إليـــه حـــاصل ضـــرب عمـــود المتغير المتمم ، x_5 ، مضروبـــا فـــى مقـــدار التغـــير علـــى النحـــو التالي :

المتغيرات الأساسية	عمود x_3	+ عمود x_5 × قيمة التغير	= عمود x_3 الجديد
x_4	-2.75	+ (-0.75) (-1.4)	= -1.7
x_1	1.25	+ (0.25) (-1.4)	= 0.9
x_6	-1.5	+ (-0.5) (-1.4)	= -0.8
-Z	-4	+ (-2.5) (-1.4)	= -0.5

وحيث أن معامل المتغير x_3 الجديـــد فـــى صـــف دالـــة الـــهدف يساوى (0.5 -) أى مازال سالباً فـــإن الحـــل الأمثـــل الأولـــى يظـــل حـــلاً أمثل كما هـــو .

أما إذا أصبح معامل المتغير x_3 الجديد فـــى صـــف دالـــة الـــهدف موجب القيمة ، مثلاً ، فإن الحل الأمثل الأولـــى فـــى هـــذه الحالـــة ســـوف يفقد أمثليته ويمكن تحسينه باختيار x_3 كمتغـــير داخـــل والاســـتمرار فـــى جولات تالية للحـــل .

٢ – أ – تحديد نطاق التغير فى معامل المتغير x_3 بالقيد الثانى (أى فى a_{23}) :

نفرض أن قيمة التغير فى معامل المتغير x_3 بالقيد الثانى هو h_{23} ويكون المطلوب هو إيجاد نطاق التغير فى قيمة h_{23} الذى يتحول بعده معامل x_3 فى صف دالة الهدف إلى قيمة موجبة ، وحيث أن المتغير المتمم للقيد الثانى هو x_5 فإن نطاق التغير يتحدد وفقا للمعادلة التالية فى صف دالة الهدف :

$$x_3 \text{ معامل} + x_5 \text{ معامل } (h_{23}) = 0$$

$$-4 + (-2.5)(h_{23}) = 0$$

إذن :

$$h_{23} = -1.6$$

ويكون نطاق التغير للقيمة h_{23} كما يلى :

$$-1.6 \le h_{23} \le \infty$$

ويعنى ذلك أن الحل الأمثل الأولى يظل أمثل فى حالة تراوح معامل المتغير x_3 فى القيد الثانى فيما بين $(3.4 = 1.6 - 5)$، ∞ ، بحيث إذا نقص معامل x_3 فى القيد الثانى عن القيمة 3.4 فإن هذا يؤدى إلى ظهور معامل موجب فى صف دالة الهدف $(Z -)$ ، وحينئذ يتم اختيار المتغير x_3 كمتغير داخل فى جولة تالية للحل ، فى حين أن أى زيادة فى معامل المتغير x_3 بالقيد الثانى سوف يظل معها الحل الحالى أمثل .

ب – تحديد نطاق التغير في معامل المتغير x_3 بالقيد الثالث (أي في a_{33}) :

بفرض أن قيمة التغير في معامل المتغير x_3 بالقيد الثالث هو h_{33} ، وحيث أن المتغير المتمم للقيد الثالث هو x_6 ، لذلك فإن نطاق التغير يتحدد وفقا للمعادلة التالية في صف دالة الهدف ، (Z -) :

x_3 معامل + x_5 معامل (h_{33}) $= 0$

$-4 + (0)\ (h_{33}) = 0$

إذن :

$$h_{33} = 0$$

هذه النتيجة تعني أن التغير في قيمة معامل x_3 بالقيد الثالث (أي في قيمة a_{33}) بأي مقدار سواء بالزيادة أو بالنقص لن يؤثر على الحل الأمثل الأولي .

ب – التغير في معاملات المتغيرات الأساسية :

إذا حدث تغير في معاملات القيود (a_{ji}) وكان هذا التغير يتعلق بأحد المتغيرات الأساسية وليكن المتغير (x_i) فسوف يؤدي ذلك إلى إحدى النتائج التالية في الحل النهائي :

- قد يظل الحل الأمثل الأولي حلا أمثل كما هو .
- قد يفقد الحل الأمثل الأولي أمثليته ولكنه يظل حلا ممكنا .
- قد يفقد الحل الأمثل الأولي أمثليته ويصبح حلا غير مسموح به في نفس الوقت .

لإختبار حساسية الحل الأمثل في هذه الحالة نضرب عمود المتغير المتمم للقيد الذي طرأ التغير على أحد معاملاته في قيمة التغير الحادث ثم نضيف الناتج إلى عمود المتغير الأساسي ، x_i ، الذي طرأ التغير على معامله فنحصل على عمود المتغير الأساسي الجديد ، x_i ، بعد التغير .

ولما كان x_i متغيرا أساسيا في الحل الأمثل الأولي فإن كافة معاملاته في جدول الحل النهائي ينبغي أن تكون أصفار في كل الصفوف ما عدا العنصر المقابل لنفس المتغير حيث يكون المعامل 1 ، كما يتضح من الشكل التالي :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	...	x_i	x_{i+1}	...	x_n	الثوابت
...	...	...	...	0	...	...	...	...
...	...	...	...	0	...	...	...	...
:				:				
x_i	...	...	...	1	...	...	...	...
:				:				
...	...	...	...	0	...	...	...	...
...	...	...	...	0	...	...	...	...
-Z	...	...	...	0	...	...	...	...

شكل (١-٢)

فإن لم يكن هذا الموقف متحققا في العمود الجديد للمتغير الأساسي ، x_i ، بعد التعديل الذي تم إدخاله آنفا ، فلا بد من استعادته

(أي جعل العنصر الموجود فى صف المتغير x_i وعمود المتغير x_i يساوي 1 وذلك باستخدام عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة، وسوف يؤدى هذا بالطبع إلى حدوث بعض التغيرات فى صف معاملات دالة الهدف و / أو ثوابت القيود وذلك على النحو التالى :

١ – إذا ظلت كافة معاملات صف دالة الهدف بعد التعديلات سالبة ، أصفار ، وظلت أيضا كافة ثوابت القيود موجبة فإن الحل الأمثل الأولي يظل كما هو حلا أمثل ، وإن طرأت بعض التغيرات على قيمة دالة الهدف ، (Z -) .

٢ – إذا ظهرت معاملات موجبة فى صف دالة الهدف وظلت ثوابت القيود موجبة فإن الحل الأمثل يفقد أمثليته ولكنه يظل حلا مسموحا به ويستوجب ذلك الاستمرار فى جولات إضافية لتحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل الجديد .

٣ – إذا ظلت كافة معاملات صف دالة الهدف بعد التعديلات سالبة ، أصفار وظهرت بعض القيم السالبة في عمود الثوابت فإن الحل لم يعد مسموحا به وينبغى تحويله إلى حل مسموح به وذلك بالاستمرار فى جولات إضافية وفقا لطريقة مبدول السمبلكس .

٤ – إذا ظهرت معاملات موجبة فى صف دالة الهدف بالإضافة إلى ظهور بعض القيم السالبة فى عمود الثوابت فإن الحل فى هذه الحالة سوف يفقد الأمثلية والإمكانية معا ، وفى هذه الحالة يمكن البدء فى حل جديد تماما للنموذج .

مثـــال (١٣) :

أعتبر مثال (٤) ، حيث كان النموذج الأصلـــى علـــى الصــــورة :

$$\text{Max } Z = 40\,x_1 + 50\,x_2$$

بشــرط أن :

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 21$$

$$5\,x_1 + 4\,x_2 \leq 30$$

$$3\,x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_i \geq 0 \;, \quad (i = 1, 2)$$

وكان الحل الأمثل الأولى للنموذج في الصــــــورة التاليـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	0	1	0.83	- 0.17	0	5
x_1	1	0	- 0.67	0.33	0	2
x_5	0	0	1.17	- 0.83	1	4
- Z	0	0	- 15	- 5	0	- 330

المطلــوب :

اختبار حساسية الحل الأمثل الحالى فـــى حالـــة :

١ – تغير معامل المتغير x_1 فـــى القيـــد الثـــانى (أى a_{21}) مـــن 5 إلـــى 2 بحيث يصبح القيد الثانى كما يلـــــى :

$$2x_1 + 4x_2 \leq 30$$

٢ – إذا أصبح القيد الثالث على الصورة :

$$3x_1 + 3x_2 \leq 15$$

أى إذا زاد معامل المتغير x_2 بالقيد الثالث من 1 إلى 3 .

الحل :

التغير الذى حدث فى معامل المتغير x_1 بالقيد الثانى (أى فى a_{21}) يساوى (3 -) ، وحيث أن متمم القيد الثانى هو المتغير x_4 ، إذن :

المتغيرات الأساسية	عمود x_1	+ عمود x_4 × قيمة التغير	= عمود x_1 الجديد
x_2	0	$+ (-0.17) \times (-3)$	$= 0.51$
x_1	1	$+ (-0.33) \times (-3)$	$= 0.01$
x_5	0	$+ (-0.83) \times (-3)$	$= 2.49$
$-Z$	0	$+ (-5) \times (-3)$	$= 15$

ولما أصبح معامل المتغير x_1 فى صف دالة الهدف موجبا فإن الحل الأمثل الحالى يفقد أمثليته ويستوجب التحسين . ومن جهة أخرى فحيث أن x_1 متغير أساسى وأسس تطبيق طريقة السمبلكس تقتضى أن تكون كافة عناصر عمود المتغير x_1 والذى يجب أن يكون مساويا 1 ، كما يتضح من شكل (١ – ٢) ، ولما كان ذلك غير متحقق فى عمود المتغير x_1 الجديد ويستحيل تحقيقه بالعمليات الجبرية العادية (جمع – طرح – ضرب – قسمة) فإن الأمر يقتضى البدء فى حل جديد للنموذج .

٢ – إذا حدث تغيـــر فى معامل المتغير x_2 بــــالقيد الثــالث (أى فـــى a_{32}) قيمتــه 2 :

حيث أن متمم القيد الثالث هو المتغير x_5 لذلك فإن :

المتغيرات الأساسية	عمود x_2	+	عمود x_5 × قيمة التغير	=	عمود x_2 الجديد
x_2	1	+	0 (2)	=	1
x_1	0	+	0 (2)	=	0
x_5	0	+	0 (2)	=	2
- Z	0	+	0 (2)	=	0

وحيث أن المتغير x_2 – كما هو واضــــح – متغـــير أساســـى لذلـــك فإن جميع عناصر عموده (فيما عدا المعــــامل الـــذى يقـــابل صــــف x_2) ينبغى أن تكون أصفار ، ولإستعادة هذا الموقــــف ينبغـــى حـــذف المعـــامل الذى ظهر فى صف المتغــــير x_5 وهـــو 2 وجعلـــه يســـاوى الصفـــر ، ويتم ذلك بضرب صف المتغير x_2 فى جدول الحل النـــــهائى فـــى القيمـــة (2 -) وجمع الناتج على صف المتغير x_5 بذات الجـــدول كمـــا يلـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
صف x_2 مضروبا فى (- 2)	0	- 2	- 1.66	0.34	0	-10
صف x_5 بعد التعديل	1	2	1.17	- 0.83	1	4
بالجمع :						
صف x_5 الجديد	0	0	- 0.49	- 0.49	1	- 6

ويصبح جدول الحل الأمثل الأولى بعد هـــذا التغيـــير فـــى المعـــامل (a_{32}) على النحو التـــالى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	0	1	0.83	- 0.17	0	0
x_1	1	0	- 0.67	0.33	0	2
x_5	0	0	-0.49	- 0.49	1	- 6
- Z	0	0	- 15	- 5	0	- 0.33

وبظهور قيمة سالبة فى عمـــود الثوابـــت فـــى صـــف المتغـــير x_5 فإن الحل لم يعد ممكنا ولتحويله إلى حـــل ممكـــن فوفقـــا لطريقـــة مبـــدول السمبلكس فإن المتغير x_5 يتم اختياره كمتغــــير خـــارج ويصبـــح صـــف المتغير x_5 هو الصـــف المحـــورى ، وبقســـمة عنـــاصر صـــف دالـــة الهدف علـــى العناصـــر المناظرة لـــها الســـالبة الإشـــارة فقـــط بـــالصف المحورى حيـــث :

$$\left(\frac{-5}{-0.49} = 10.2 \quad , \quad \frac{-15}{-0.49} = 30.61 \right)$$

والنسبة الأقل وهـــى 10.2 تقـــابل المتغـــير x_4 فيكـــون هـــو المتغـــير الداخل ويكون عمـــوده هو العمـــود المحـــورى ثـــم ننتقـــل إلـــى الجولـــة التالية للحـــل :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	0	1	1	0	- 0.35	7.08
x_1	1	0	- 1	0	0.67	- 2.04
x_4	0	0	1	1	- 2.04	12.24
- Z	0	0	- 10	0	- 10.2	- 268.78

بظهور قيمة سالبة فى عمود الثوابت فيتم الاستمرار فى جولات الحل وفقا لطريقة مبدول السمبلكس حيث يكون المتغير x_1 هو المتغير الخارج والمتغير x_3 هو المتغير الداخل مكانه وننتقل إلى جولة الحل التالية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	1	1	0	0	0.32	5.04
x_3	- 1	0	1	0	0.67	2.04
x_4	- 1	0	0	1	- 1.37	10.2
- Z	- 10	0	0	0	- 16.9	- 248.38

يلاحظ فى الجدول الأخير أن جميع معاملات عمود الثوابت أصبحت موجبة وفى نفس الوقت فإن المتغيرين غير الأساسيين وهما

x_5 , x_1 لهما معاملين سالبين في صف دالة الهدف ، (Z -) ، لذلك يكون الحل الحالي هو الحل الأمثل .

رابعا : إضافة قيد هيكلي جديد

في بعض الأحيان قد تستجد بعض الظروف تقتضي إضافة قيد هيكلي جديد للنموذج وذلك بعد الحصول على الحل الأمثل ، ويلزم لذلك اختبار ما إذا كان الحل الأمثل الأولي يستوفي القيد الجديد أم لا ؟

فإذا كان الحل الأمثل الأولي يستوفي القيد الجديد فيظل الحل الأولي حلاً أمثل كما هو ، أما في حالة عدم استيفاء القيد الجديد فيتم تحويل القيد الجديد إلى معادلة وذلك بإضافة متغير متمم جديد ، ثم يضاف صف هذا القيد إلى جدول الحل النهائي وإجراء ما يلزم من تعديلات لاستعادة خواص جدول الحل الأمثل بالطرق الجبرية المعتادة ونرى أثر ذلك على عمود الثوابت ، فإذا ظلت المعاملات في عمود الثوابت موجبة فإن الحل الأمثل الحالي يظل أمثل كما هو وتظل قيمة دالة الهدف ، Z ، كما هي . أما إذا ظهرت قيم سالبة في عمود الثوابت ففي هذه الحالة لابد من الاستمرار في جولات إضافية وفقاً لطريقة مبدول السمبلكس للتخلص من تلك القيم السالبة في عمود الثوابت .

مثـال (١٤) :

اعتبر مثال (١٠) ، وبفـــرض أنـــه لا يمكـــن تصريـــف ســـوى 4 وحدات من المتغير x_1 ، فالمطلوب اختبار حساسـية الحـل الأمثـل لـهذا التعديـل .

الحـــل :

التعديل المقترح يعنى إضافة قيد هيكلى جديـــد هـــو :

$$x_1 \leq 4$$

ولما كان الحل الأمثل الأولى لا يستوفى هـــذا القيـــد فيلـــزم تحويـــل المتباينة إلى معادلة بإضافة المتغير المتمم x_7 علـــى النحـــو التـــالى :

$$x_1 \quad + \quad x_7 \quad = \quad 4$$

بإضافة هذا القيد الهيكلى الجديد فى جـــدول الحـــل النـــهائى فيصبـــح على الصورة التاليـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_4	0	0.5	- 2.75	1	- 0.75	0	0	6
x_1	1	0.5	1.25	0	0.25	0	0	5
x_6	0	4	- 1.5	0	- 0.5	1	0	2
x_7	1	0	0	0	0	0	1	4
- Z	0	- 2	- 4	0	- 2.5	0	0	- 50

ولما كان من خواص الحل النهائي أن كافة معاملات عمود المتغير الأساسي ينبغي أن تساوى أصفار ما عدا المعامل المتقاطع في صف نفس المتغير والذي ينبغي أن يساوى 1 ، وحيث أن هذا الشرط لم يعد متحققا بالنسبة للمتغير x_1 ، لذلك ينبغي أن نجعل المعامل الموجود عند تقاطع صف المتغير x_7 مع عمود المتغير x_1 – بجدول الحل السابق – يساوى صفر بدلاً من الواحد وذلك لتحقيق خاصية الحل النهائي السابقة ويتم ذلك بطرح عناصر صف المتغير x_1 من عناصر صف المتغير x_7 الجديد وذلك على النحو التالي :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_4	0	0.5	- 2.75	1	- 0.75	0	0	6
x_1	1	0.5	1.25	0	0.25	0	0	5
x_6	0	4	- 1.5	0	- 0.5	1	0	2
x_7	0	- 0.5	- 1.25	0	- 0.25	0	1	- 1
- Z	0	- 2	- 4	0	- 2.5	0	0	- 50

بظهور قيمة سالبة في معاملات عمود الثوابت فإن الحل الحالي لم يعد حلاً مسموحاً به وينبغي – وفقا لطريقة مبدول السمبلكس – اختيار المتغير x_7 كمتغير خارج والمتغير x_3 كمتغير داخل وننتقل إلى جولة الحل التالية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_4	0	1.6	0	1	- 0. 2	0	2.2	8.2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	4
x_6	0	4.6	0	0	- 0.2	1	- 1.2	3.2
x_3	0	0.4	1	0	0.2	0	- 0.8	0.8
- Z	0	- 0.4	0	0	- 1.7	0	- 3.2	- 46.8

وحيث أن معاملات عمـــود الثوابــت أصبحـــت جميعـــها موجبـــة ، كما أن المتغيرات غير الأساسية وهـــى : x_7 , x_5 , x_2 لـــها معـــاملات سالبة فى صف دالة الهدف ، (أى صـــف Z -) ، فيكـــون الحـُل الحـــالى هو الحل الأمثل وهو كما يلـــى :

$$Z = 46.8 , \quad x_6^* = 3.2 , \quad x_4^* = 8.2 , \quad x_3^* = 0.8 , \quad x_1^* = 4$$

خامساً : إضافـة متغيـر جـديـد

بعد التوصل إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجـــة الخطيـــة قـد تظـــهر بعض المتغيرات القرارية الجديدة التـــى يجـــب إدخالـــها ضمـــن متغـــيرات النموذج الأصلية ، ويعنى ذلك إضافـــة متغـــير (أو متغـــيرات) جديـــد (أو جديدة) بمعامل مستقل فى دالـــة الـــهدف بالإضافـــة إلـــى ظـــهور هـــذا المتغير (أو تلك المتغـــيرات) الجديـــد (أو الجديـــدة) بمعـــاملات جديـــدة فى كل أو بعض القيود الهيكليـــة للنمـــوذج .

ويمكن اختبار حساسية الحل الأمثل الأولى الذى تم التوصل إليه وذلك بافتراض أن قيمة المتغير الجديد المضاف للنموذج يساوى صفر، بمعنى أننا سوف نعتبره كما لو كان متغير أساسى بالنموذج . وفى إطار العلاقة بين النموذج الأصلى ونموذج المبدول فإن إضافة متغير جديد للنموذج الأصلى يعنى إضافة قيد جديد لنموذج المبدول ، ومن ثم يمكن اختبار مدى إمكانية الحل الأمثل الأولى فى ضوء هذا التعديل .

ففى حالة ما إذا كان الحل الأمثل الأولى يستوفى هذا القيد الجديد فى نموذج المبدول فيظل الحل الأولى للنموذج الأصلى أمثل ، أما إذا لم يتم استيفاء القيد الجديد فى نموذج المبدول فإنه يمكن الاستمرار فى جولات إضافية لحل النموذج الأصلى وذلك باختيار المتغير الجديد المضاف كمتغير داخل ، وفى هذه الحالة فإن هناك تعديلات سوف تطرأ على معاملات جدول الحل النهائى سواء فى معاملات دالة الهدف (t_i) أو فى بعض معاملات القيود الهيكلية (a_{ji}) .

مثال (١٥):

اعتبر مثال (١٠) واختبر مدى حساسية الحل الأمثل الأولى الذى تم التوصل إليه إذا أصبح النموذج الأصلى على النحو التالى :

$$\text{Max } Z = 10\,x_1 + 3\,x_2 + 8.5\,x_3 + 6\,x_7$$

بشـــرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_7 \leq 21$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_7 \leq 20$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$$
$$x_i \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 7)$$

الحـــل :

إضافة المتغير الجديد x_7 للنمـــوذج الأصلـــى يعنـــى إضافـــة قيـــد جديد فى نموذج المبدول ، هذا القيد يأخذ الصـــــورة التاليـــة:

$$4y_1 + 3y_2 \geq 6$$

وفى إطار العلاقة بين متغيرات النمـــوذج الأصلـــى (x_i) ومتغـــيرات نموذج المبدول (y_i) فمـــن المعلـــوم أن :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

وحيـــث أن $n = 3$ (عـــدد المتغـــيرات القراريـــة فـــى النمـــوذج الأصلـــى) إذن :

$$y_j^* = x_{3+j}$$
$$y_1^* = x_4 = 0$$
$$y_2^* = x_5 = 2.5$$
$$y_3^* = x_6 = 0$$
$$y_4^* = x_1 = 0$$

$y_5^* = x_2 = 2$

$y_6^* = x_3 = 4$

بالتعويض عن قيم y_j^* فى القيد المضاف لنموذج المبدول ينتج أن :

$4 (0) + 3 (2.5) = 7.5$

وهذا يشير إلى استيفاء هذا القيد مما يعنى أن حل نموذج المبدول مازال ممكناً ، وتأسيساً على ذلك فإن حل النموذج الأصلى يظل أيضاً حلاً أمثل حتى بعد إدخال المتغير الجديد ، x_7 .

مثال (١٦):

إذا أعطيت النموذج التالى :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

بشرط أن :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 10$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 18$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 14$$
$$x_i \ge 0 , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

المطلوب :

١ – حل النموذج بطريقة السمبلكس وإيجاد القيم المثلى لمتغيراته .

٢ – تحديد نطاق التغير فى معامل x_1 بدالة الهدف الذى يظل معه الحل أمثل.

٣ – اختبار حساسية الحل الأمثل المتحصل عليه فى كل من الحالات الآتية :

أ – إذا أصبح القيد الأول علـــى الصـــورة :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 10$$

ب – إذا أصبح القيد الثانى علـــى الصـــورة :

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 16$$

جـ – إذا أصبح النموذج الأصلى علـــى الصـــورة :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 11x_7$$

بشــرط أن :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_7 \le 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_7 \le 14$$

$$x_i \ge 0 , \quad (i = 1, 2, 3, 7)$$

٤ – تحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الأول الذى يظل معه الحل أمثل .

الحـــــل :

نضيف متغيرات متممة للقيود الهيكلية بواقع متغـــير متمـــم لكـــل قيـــد لتتحول القيود الهيكلية إلى معـــــادلات .

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 14$$

تبدأ الجولة الأولى باعتبار أن المتغيرات المتممة هي المتغيرات الأساسية .

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	2	3	1	1	0	0	10
x_5	3	1	4	0	1	0	18
x_6	2	4	1	0	0	1	14
-Z	6	5	2	0	0	0	0

بتطبيق قواعد طريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيار x_1 كمتغير داخل ويكون عمود x_1 هو العمود المحورى ، ثم بقسمة معاملات عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها بالعمود المحورى واختيار أقل خارج قسمة لذلك يكون المتغير x_4 هو المتغير الخارج ويكون صف x_4 هو الصف المحورى ويتم الانتقال إلى الجولة التالية :

الجولـــة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_1	1	1.5	0.5	0.5	0	0	5
x_5	0	- 3,5	2.5	- 1.5	1	0	3
x_6	0	1	0	- 1	0	1	4
- Z	0	- 4	- 1	- 3	0	0	- 30

بتطبيق قواعــد اختبــار الأمثليــة يلاحــظ أن المتغــيرات الأساســية وهى : x_4 , x_3 , x_2 لهم معــاملات ســالبة فــى صــف دالــة الــهدف ، لذلك فإن الحل الحالى أمثل وهو كمــا يلــى :

$$Z = 30 \;,\quad x_6^* = 4 \;,\; x_5^* = 3 \;,\; x_1^* = 5$$

٢ – لتحديد نطاق التغير فى معامل x_1 بدالة الهدف الذى يظل معــه الحــل الأمثل دون تغيير ، يلاحظ أن المتغير x_1 متغير أساسى .

نفرض أن قيمة التغير فى معامل x_1 بدالة الـــهدف هــو : h ،

صف x_1 مضروبا فى عكس التغير (أى مضروبا فى h -) هو :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	- h	- 1.5 h	- 0.5 h	- 0.5 h	0	0

صف (Z -) بعد أدخال التغـــير :

-Z	h	-4	-1	-3	0	0

بجمع العناصر المتناظرة فى الصفيـن نحصـل علـى صـف (Z -) الجديد وهـو :

-Z	0	(- 1.5 h-4)	(- 0.5 h-1)	(- 0.5 h-3)	0	0

من عمود x_2 ينتـج أن :

$$-1.5\ h - 4 = 0$$

إذن :

$$h = -\ 2.67$$

من عمود x_3 ينتج أن :

$$-0.5\ h - 1 = 0$$

إذن

$$h = -2$$

من عمود x_4 ينتج أن :

$$-0.5\ h - 3 = 0$$

إذن

$$h = -6$$

باختيار أصغر قيمة للتغير h بإشارة سالبة لتكون الحد الأدنى لنطاق التغير ، فيكون الحد الأدنى لنطاق التغير في معامل x_1 بدالة الهدف هو (2 -) .

حيث أنه لا توجد قيم موجبة للمتغير h فيكون الحد الأعلى لنطاق التغير غير موجود ، إذن :

الحد الأعلى لنطاق التغير في معامل x_1 بدالة الهدف = ∞
ومن ثم فإن :

$$-2 \leq h \leq \infty$$

وبناء على ذلك فإن :

الحد الأدنى لمعامل x_1 بدالة الهدف = $6 - 2 = 4$

الحد الأعلى لمعامل x_1 بدالة الهدف = ∞

$\infty \geq$ معامل x_1 بدالة الهدف الذى يظل معه الحل أمثل ≥ 4

٣ – أ – لاختبار حساسية الحل الأمثل المتحصل عليه إذا أصبح القيد الأول على الصورة :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

فى هذه الحالة التغير الحادث فى معامل x_2 بالقيد الأول (أى فى a_{12}) يساوى (2 -) ، وحيث أن x_2 متغير غير أساسى كما أن متمم القيد الأول هو المتغير x_4 ، إذن :

المتغيرات الأساسية	عمود x_1 + (قيمة التغير) عمود x_4	عمود x_1 الجديد =
x_1	1.5 + 0.5 (-2)	= 0.5
x_5	-3.5 + (-1.5) (-2)	= -0.5
x_6	1 + (-1) (-2)	= 3
-Z	-4 + (-3) (-2)	= 2

وحيث أن معامل المتغير x_1 الجديد في صف دالة الهدف (Z -) أصبح يساوى قيمة موجبة لذلك فإن الحل الأمثل الأولى يفقد أمثليته ويقبل التحسين على النحو التالى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_1	1	0.5	0.5	0.5	0	0	5
x_5	0	-0.5	2.5	-1.5	0	0	3
← x_6	0	3	0	-1	1	1	4
-Z	0	2	-1	-3	0	0	-30

وطبقا لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيار المتغير x_2 كمتغير داخل واختيار المتغير x_6 كمتغير خارج وننتقل إلى الجولة التالية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_1	1	0	0.5	0.67	0	- 0.17	4.33
x_5	0	0	2.5	- 1.67	1	0.17	3.67
x_2	0	1	0	- 0.33	0	0.33	1.33
- Z	0	0	- 1	- 3.67	0	- 0.67	- 32.67

وحيث المتغيرات غير الأساسية وهي : x_3 , x_4 , x_6 لها معاملات سالبة فى صف دالة الهدف (Z -) فيكون الحل الحالى أمثل .

ب - إذا أصبح القيد الثانى على الصورة :

$$3\ x_1 + x_2 + 4\ x_3 \leq 16$$

التغير الذى حدث هو نقص ثابت القيد الهيكلى الثانى بمقدار 2 ، أى أن التغير فى ثابت القيد الثانى هو (2 -) ومتمم القيد هو المتغير x_5 ، إذن :

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد = عمود الثوابت + قيمة التغير × عمود x_5
x_1	0 × (- 2) + 5 = 5
x_5	1 × (- 2) + 3 = 1
x_6	0 × (- 2) + 4 = 4
- Z	0 × (- 2) + (- 30) = - 30

وحيث أن معاملات عمود الثوابت الجديد مازالت موجبة ، إذن الحل يظل أمثل كما هو .

جـ - اختبار حساسية الحل الأمثل إذا أصبح النموذج الأصلي على النحو التالي :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 11x_7$$

بشرط أن :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_7 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_7 \leq 14$$

$$x_i \geq 0 , \quad (i = 1, 2, 3, 7)$$

تم إضافة المتغير الجديد x_7 للنموذج الأصلي وهذا يعني إضافة قيد جديد في نموذج المبدول ويأخذ هذا القيد الصورة التالية :

$$4y_1 + 6y_3 \geq 11$$

ومن العلاقة بين متغيرات نموذج المبدول (y_j) ومتغيرات النموذج الأصلي (x_i) يتضح أن :

$$y_j^* = x_{n+j} = x_{3+j}$$

$$y_1^* = x_4 = 3$$

$$y_3^* = x_6 = 0$$

بالتعويض عن قيم y_j^* في القيد الجديد فإن :

$$4(3) + 6(0) = 12$$

ويعنى ذلك أن القيد الجديد مازال مستوفى وبالتالى فإن حل نموذج المبدول سيظل ممكناً ، ويقود ذلك إلى أن حل النموذج الأصلى يظل أيضاً حلاً أمثل حتى بعد إدخال المتغير الجديد وهو x_7 .

مثال (١٧) :

فيما يلى البرنامج الخطى التالى :

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$$

بشرط أن :

$$5x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_i \geq 0 \,, \qquad (i = 1, 2)$$

وكانت إحدى جولات الحل بطريقة السمبلكس على النحو التالى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	3	0	1	2	0	14
x_2	1	1	0	-1	0	5
x_5	1	0	0	0	1	4
-Z	10	0	0	15	0	-75

المطلوب :

١ – هل الحل الحالى أمثل أم لا ؟ وإن لـــم يكــن أمثــل فمــا هــو الحــل الأمثل ؟ وأوجد القيم المثلى لمتغيرات النمـــوذج الأصلـــى .

٢ – اشتقاق نموذج المبدول وإيجاد القيم المثلى لمتغيرات نموذج المبدول .

٣ – اختبار حساسية الحل الأمثل للنموذج الأصلى وذلك فى الحالات التالية :

أ – إذا نقص معامل المتغير x_2 بدالة الـــهدف بمقــدار 4 .

ب – إذا أصبح القيد الأول علـــى الصـــورة :

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

جـ – إذا أضيف القيد التالى إلى النمـــوذج الأصلـــى :

$$x_2 \leq 8$$

٤ – تحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الأول الذى يظل معه الحل أمثل .

الحـــــــل :

١ – لإختبار أمثلية الحل الحـــالى ، حيــث أن المطلــوب هــو : Max Z والمتغيرين غير الأساسيين هما : x_4 , x_1 لهما معاملات موجبــة فـــى صف دالة الهدف ، (Z -) ، فيكون الحل غير أمثل ويقبل التحسين .

وفقا لطريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيـــار المتغـير x_4 كمتغـير داخــل ، واختيار المتغـــير x_3 كمتغـير خــارج وننتقــل إلـى الجولــة التالية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	1.5	0	0.5	1	0	7
x_2	2.5	1	0.5	0	0	12
x_5	1	0	0	0	1	4
- Z	- 12.5	0	- 7.5	0	0	- 180

حيث أن المتغيرين غير الأساسيين وهما : x_1 , x_3 لهما معاملات سالبة فى صف (Z -) فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل :

القيم المثلى لمتغيرات النموذج الأصلى هى :

$$x_5^* = 4 \;, \quad x_4^* = 7 \;, \quad x_2^* = 12$$

بينما $x_1^* = x_3^* = 0$, $Z = 180$.

٢ – لاشتقاق نموذج المبدول للنموذج الأصلى :

حيث أن دالة الهدف فى النموذج الأصلى (x_i) على صورة : Max Z لذا ينبغى أن تكون كافة القيود الهيكلية فى النموذج على صورة أصغر من أو يساوى كما يلى :

$$5\,x_1 + 2\,x_2 \le 24$$

$$-\,x_1 - x_2 \le -5$$

$$x_1 \le 4$$

يأخذ نموذج المبدول (y_i) الصورة التالية :

$$\text{Min } Z = 24y_1 - 5y_2 + 4y_3$$

بشــرط أن :

$$5y_1 - y_2 + y_3 \geq 25$$

$$2y_1 - y_2 \geq 15$$

$$y_i \geq 0 \;, \quad (i = 1, 2, 3)$$

لاشتقاق القيم المثلى لمتغيرات نموذج المبدول ، فمن المعلوم أن :

$$y_j^* = x_{n+j}$$

وحيث أن $n = 2$ فــإن :

$$y_j^* = x_{2+j}$$

$$y_1^* = x_3 = 7.5$$

$$y_2^* = x_4 = 0$$

$$y_3^* = x_5 = 0$$

$$y_4^* = x_1 = 12.5$$

$$y_5^* = x_2 = 0$$

$$Z(y_j) = 180$$

٣ – أ – لإختبار حساســية الحــل الأمثــل للنمــوذج الأصلــى إذا نقــص معامل المتغير x_2 بدالة الــهدف بمقــدار 4 .

يلاحظ أن المتغير x_2 يعد متغيراً أساسياً فى جدول الحل الأمثل ، وقيمة التغير فى معامل x_2 يساوى 4- ، لذلك فإن :

صف x_2 مضروبا فى عكس التغير (أى مضروبــاً فــى 4) هــو :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_1	10	4	2	0	0	48

صف (Z -) بعد إدخال قيمة التغير بــه هــو :

- Z	- 12.5	- 4	- 7.5	0	0	- 180

بجمع العناصر المتناظرة بالصفين نحصل على صف (Z -) الجديد وهو :

- Z	- 2.5	0	- 5.5	0	0	- 132

حيث أن المتغيرين غير الأساســيين x_1 , x_3 مــازالت معاملاتــهما سالبة فى صف دالة الهدف ، فيظل الحل الحــالى أمثــل .

ب – إذا أصبح القيد الأول علــى الصــورة :

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 24$$

تغــير معــامل x_1 بــالقيد الأول (أى a_{11}) مــن 5 إلـــى 3 ، ومن ثم فإن قيمة التغير فى معــامل x_1 بــالقيد الأول هــى (2 -) ، كمــا أن متمم القيــــد الأول هــو المتغــير x_3 . ولإختبــار حساســية الحــل الأمثل لهذا التغير ـــإن :

المتغيرات الأساسية	عمود x_1 الجديد = قيمة التغير × عمود x_3 + عمود x_1
x_4	1.5 + 0.5 × (- 2) = 0.5
x_2	2.5 + 0.5 × (- 2) = 1.5
x_5	1 + 0 × (- 2) = 1
- Z	- 12.5 + - 7.2 × (- 2) = 2.5

وحيث أن معامل المتغير x_1 الجديد في صف دالة الهدف (Z -) أصبح مساويا 2.5 أى أصبح ذا قيمة موجبة وبالتالى فإن الحل الأمثل الحالى سوف يفقد أمثليته ويمكن تحسينه على النحو التالى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	0.5	0	0.5	1	0	7
x_2	1.5	1	0.5	0	0	12
x_5	1	0	0	0	1	4
- Z	2.5	0	- 7.5	0	0	- 180

وفقا لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية يتم اختيار المتغير x_1 كمتغير داخل والمتغير x_5 كمتغير خارج ويتم الانتقال للجولة التالية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	0	0	0.5	1	- 0.5	5
x_2	0	1	0.5	0	- 1.5	6
x_1	1	0	0	0	1	4
- Z	0	0	- 7.5	0	- 2.5	- 190

وكما هو واضح فإن الحل الحالى أصبح هــو الحــل الأمثــل .

جـ - اختبار حساسية الحل الأمثل الأولى إذا أضيـــف القــيد التــالى إلــى النموذج الأصلــى :

$$x_2 \leq 8$$

يلاحظ أن قيمة x_2^* فى الحل الأمثل الأولى تساوى 12 ، وبذلــك فإن الحل الأمثل الأولى لا يستوفى هذا القيد الجديد ، ومن ثم ينبغى تحويــل المتباينة إلى معادلة بإضافة المتغير المتمم x_6 كما يلى :

$$x_2 \qquad + \; x_6 \; = \; 8$$

بإضافة معاملات هذه المعادلة إلــى جــدول الحــل الأمثــل الأولــى فيأخذ الصورة التاليــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	1.5	0	0.5	1	0	0	7
x_2	2.5	1	0.5	0	0	0	12
x_5	1	0	0	0	1	0	4
x_6	0	1	0	0	0	1	8
- Z	-12.5	0	- 7.5	0	0	0	- 180

وحيث أن المتغير x_2 متغير أساسى فينبغى أن يكون العنصر الواقع عند ملتقى صف x_2 مع عمود x_2 هو 1 وباقى عناصر عمود x_2 تساوى أصفار (أنظر شكل (١ – ٢)) ، ومن ثم يجب التخلص من العنصر 1 الموجود عند ملتقى صف المتغير x_6 مع عمود المتغير x_2 وذلك بطرح عناصر صف المتغير x_2 من عناصر صف المتغير x_6 بالجدول السابق كما يلى :

المتغيرات الأساسية	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	1.5	0	0.5	1	0	0	7
x_2	2.5	1	0.5	0	0	0	12
x_5	1	0	0	0	1	0	4
← x_6	- 2.5	1	- 0.5	0	0	1	- 4
- Z	-12.5	0	- 7.5	0	0	0	- 180

بظهور قيمة سالبة فى معاملات عمود الثوابت فإن الحل الحالى لم يعد حلاً مسموحاً به ، وفقا لقواعد طريقة مبدول السمبلكس يتم اختيار المتغير x_6 كمتغير خارج والمتغير x_1 كمتغير داخل وتكون جولة الحل التالية كما يلى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_4	0	0	0.2	1	0	0.6	4.6
x_2	0	1	0	0	0	1	8
x_5	0	0	- 0.2	0	1	0.4	2.4
x_1	1	0	0.2	0	0	- 0.4	1.6
- Z	0	0	- 5	0	0	- 5	- 160

وحيث أن كافة معاملات عمود الثوابت فى جدول الحل الأخير أصبحت موجبة فإن الحل الحالى يصبح حلاً مسموحاً به (أى حلاً ممكناً) ، ثم بالنظر إلى المتغيرات غير الأساسية فى هذا الجدول فهما عبارة عن المتغيرين x_3 , x_6 ولهما معاملات سالبة فى صف دالة الهدف (Z -) ، فيكون الحل الحالى حلاً أمثل أيضاً وهو كالتالى :

$$Z = 160 \ , \ x_5^* = 2.4 \ , \ x_4^* = 4.6 \ , \ x_2^* = 8 \ , \ x_1^* = 1.6$$

٤ – لتحديد نطاق التغير فى ثابت القيد الأول الذى يظل معه الحل أمثل ، يلاحظ أن المتغير المتمم للقيد الأول هو المتغير x_3 ، وبفرض أن قيمة التغير فى ثابت القيد الأول هو h ، ومن ثم فإن:

المتغيرات الأساسية	عمود الثوابت الجديد= عمود الثوابت + (h) × عمود x_3
x_4	0.5 (h) + 7 = 0.5 h + 7
x_2	0.5 (h) + 12 = 0.5 h + 12
x_5	0 (h) + 4 = 4
- Z	- 7.5 (h) + (- 180) = - 7.5 h - 180

بمساواة معاملات عمود الثوابت الجديد بالصفر وحل المعادلات الناتجة نحصل على ما يلى :

من صف x_4 :

$$0.5\ h + 6 = 0$$

إذن : $h = -14$

من صف x_2 :

$$0.5\ h + 12 = 0$$

إذن : $h = -24$

ومن ثم فإن :

الحد الأدنى لنطاق التغير = 14 -

الحد الأعلى لنطاق التغير غير موجود أى يساوى ∞

$$-14 \le h \le \infty$$

ويكون الحد الأدنى الذى يصل إليه ثـــابت القيـــد الأول ويظـــل معـــه الحل أمثل هـــو :

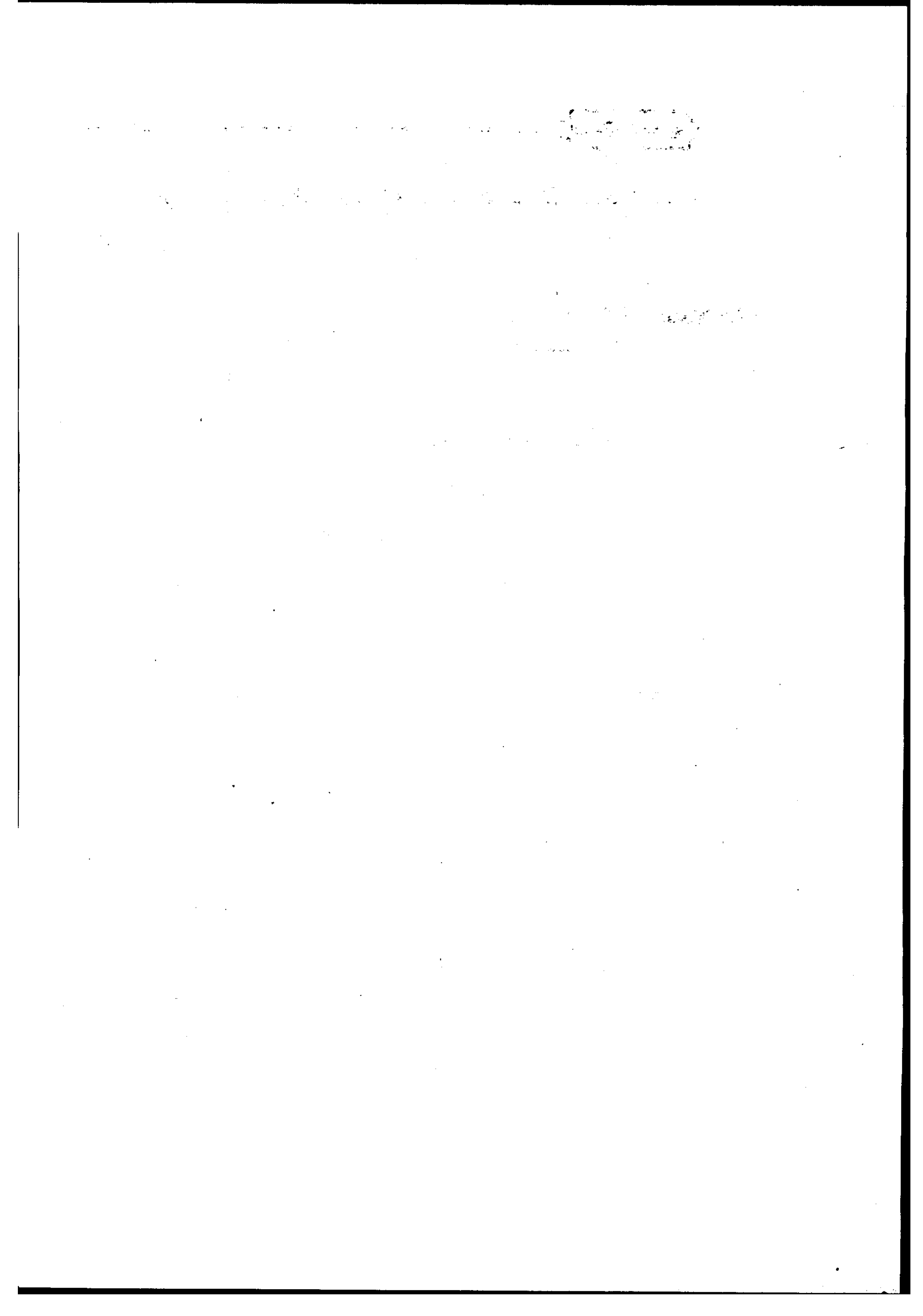
$$24 - 14 = 10$$

الحد الأعلى الذى يصل إليه ثـــابت القيـــد الأول ويظـــل معـــه الحـــل أمثل يســـاوى ∞ .

إذن : نطاق التغير فى ثابت القيد الأول الذى يظل معه الحـــل أمثـــل هـــو:

10 ≤ ثابت القيد الأول ≤ ∞

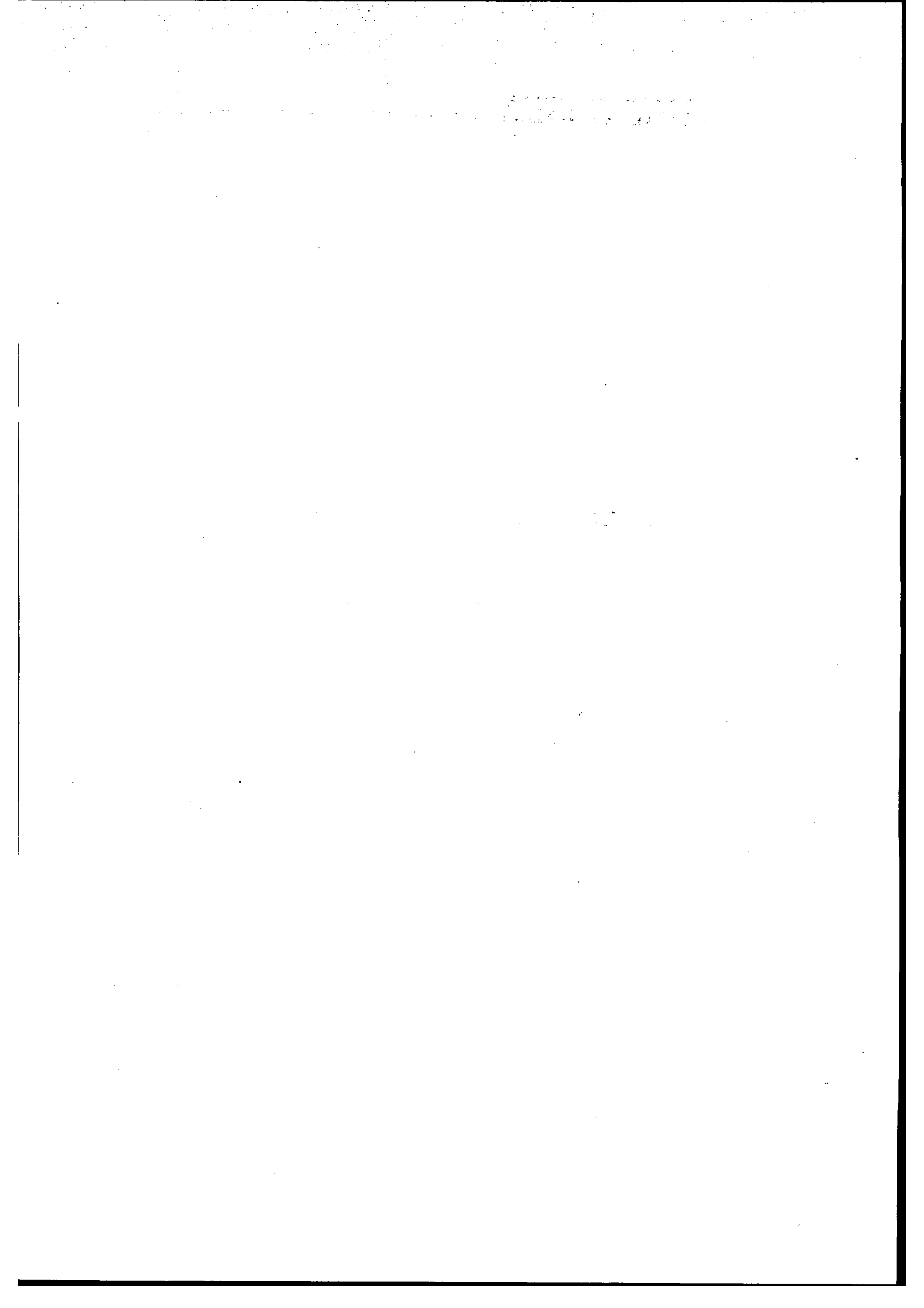
ففى داخل هذا النطاق يظل الحل الأمثـــل الأولـــى أمثـــل كمـــا هـــو ولكـــن قيمة دالة الهدف سوف تتغير بمقـــدار (h 7.5 -) .



الباب الثاني

برمجة الاعداد الخطية الصحيحة

Integer Linear Programming



الباب الثانى

برمجة الإعداد الخطية الصحيحة

- مقدمـــــة
- طريقـة التفريـــع والتحـديـد
  - التفـــريـــع
  - التحـديـــد

(٢ – ١) مقدمـــــة :

نموذج برمجة الأعداد الصحيحـــــة هـــو نمـــوذج خطـــى يشـــترط أن تكون كل متغيراته أعـــداداً صحيحـــة ، لذلـــك فـــإن التقريـــب الأول لحـــل نموذج برمجة الأعداد الصحيحـــة يمكـــن الحصـــول عليـــه بتجـــاهل هـــذا الشرط وحل البرنامج الخطى بإحدى الطرق الســـابق تقديمـــها ، وإذا كـــان الحل الأمثل للبرنامج الخطى أعـــداداً صحيحـــة ، يكـــون هـــذا الحـــل هـــو نفسه الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحـــة ، وإلا – وهـــذه هـــى الحالـــة الغالبة – فإنه يجب تقريب عنـــاصر الحـــل إلـــى أقـــرب أعـــداد صحيحـــة ممكنة للحصول على تقريب آخر . وتنفذ هـــــذه الطريقـــة غالبـــاً إذا كـــانت قيم المتغيرات القرارية الأساسية أعداداً كبيرة وتكون هـــــذه الطريقـــة غـــير دقيقة إذا كانت قيم المتغيرات القرارية الأساســـية أعـــداداً صغـــيرة .

(٢-٢) طريقة التفريع والتحديد

Branch and Bound Algorithm

تعتبر هذه الطريقة من أهـــم الطـــرق المســـتخدمة فـــى حـــل برامـــج الأعداد الصحيحة وأكثرها إنتشـــاراً .

نفرض أن لدينا البرنامج الخطى للأعداد الصحيحـــــة التـــالى :

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n} t_i \; x_i \qquad (1)$$

بشـــرط أن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i \le (\text{أو} \ge \text{أو} =)\ c_j \qquad (j = 1,2,\dots,m) \qquad (2)$$

x_i أعداد صحيحة (3)

$$x_i \ge 0 , \qquad (i = 1, 2, \dots, n) . \qquad (4)$$

والآن ما هو المقصود بعمليتى التفريع والتحديد ؟

(٢-٢-١) التفريع

نعتبر برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى بمثابة برنامج أول ، ونوجد الحل الأمثل لهذا التقريب ، مع إهمال القيد (3) ، أى مع إهمال شرط الأعداد الصحيحة ، وذلك باستخدام إحدى طرق السمبلكس المناسبة والتى سبق عرضها فى الباب الأول ، ويعتبر هذا الحل بمثابة تقريب أول .

فإذا كان التقريب الأول يحقق جميع قيود النموذج الأصلى بما فيها القيد (3) فيكون هذا التقريب حل أمثل ونهائى للبرنامج الأصلى. وإذا احتوى التقريب الأول على متغير غير صحيح وليكن x_i^* $(i = 1, 2, \dots, p)$ ، نفرض أن هذا المتغير يقع ضمن حدين أدنى وأعلى وهما :

$$L_i \le x_i^* \le U_i , \qquad (i = 1, 2, \dots, p) \qquad (5)$$

حيث : U_i عدد صحيح أكبر مباشرة من x_i^*

L_i عدد صحيح أصغر مباشرة من x_i^*

p عدد المتغيرات القرارية المثلى

هذا القيد الجديد يمكننا من بناء قيدين إضافيين هما :

$$x_i \geq U_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p \qquad (6)$$

$$x_i \leq L_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p \qquad (7)$$

بإضافة القيد (6) إلى برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى نحصل على برنامج أعداد صحيحة ثانى ، وبإضافة القيد (7) إلى برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى أيضاً نحصل على برنامج أعداد صحيحة ثالث .

وتسمى عملية تفريع البرنامج الأصلى إلى برنامجين ثانى وثالث بعملية " التفريع " ، ولها تأثير على تقليص منطقة الحلول الممكنة بطريقة يمكن بها حذف الحل الحالى للأعداد غير الصحيحة لـ x_i ولكنها تحافظ على كل حلول الأعداد الصحيحة الممكنة للبرنامج الأصلى .

ثم نوجد الحل الأمثل للبرنامجين المولدين : الثانى والثالث مع إهمال قيد الأعداد الصحيحة رقم (3) ، ونعتبر حل البرنامج الثانى تقريب ثان ، وحل البرنامج الثالث كتقريب ثالث . فإذا كان أحد هذين التقريبين يحقق جميع قيود النموذج الأصلى بما فيها القيد (3) ويعطى قيمة أكبر لدالة الهدف من التقريب الآخر وذلك فى حالة تعظيم دالة الهدف (أو قيمة أصغر فى حالة تصغير وتدنية دالة الهدف). فى هذه الحالة يعتبر هذا التقريب كحل أمثل ونهائى للنموذج الأصلى ، وتنتهى عملية التفريع . وفى الحالة الأخرى ، تستمر عملية التفريع بنفس الأسلوب المذكور .

وإذا كان هناك أكثر من برنامج يمكن أن تجرى منه عملية التفريع ، نختار البرنامج الذى له أكبر قيمة لدالة الهدف وذلك فى حالة التعظيم ، والبرنامج الذى له أصغر قيمة لدالة الهدف وذلك فى حالة التدنية أو التصغير ، ونبنى القيدين الإضافيين (6) ، (7) فى كل مرة لكل متغير غير صحيح ونضيفهما إلى البرنامج الحالى واحداً فى كل مرة للحصول على برنامجين فرعيين جديدين .

وإذا أحتوى البرنامج الحالى على أكثر من متغير واحد غير صحيح (ويطلب أن يكون عدداً صحيحاً) ، نفرض القيدين الإضافيين الجديدين على المتغير الذى غالبا ما يكون عدداً صحيحاً ، بمعنى أن المتغير الذى يقترب جزء الكسر فيه من 0.5 ، ولو حدث تساوٍ فى الجزء الكسرى ، يتم اختيار المتغير بطريقة عشوائية .

(٢-٢-٢) التحديد

بفرض أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف ، فإن التفريع يستمر حتى الحصول على حل الأعداد الصحيحة الأول (الذى يكون حل أعداد صحيحة) وتصبح قيمة دالة الهدف لحل الأعداد الصحيحة الأول هى الحد الأدنى للبرنامج ، وكل البرامج التى تؤدى حلولها الأولى سواء أكانت أعداداً صحيحة أم لا – إلى قيم لدالة الهدف أصغر من الحد الأدنى ، تصبح ملغاة .

وتستمر عملية التفريع من البرامج التى لها تقريب (حل) أعداد غير صحيحة والتى تعطى قيماً لدالة الهدف أكبر من الحد الأدنى.

ويستمر الحد الأدنى الحالى كحد أدنـــى لتفريـــع جديـــد إذا لـــم يعـــط هـــذا التفريع تقريب أعداد صحيحة ذا قيمة أكـــبر لدالـــة الـــهدف . أم إذا ظـــهر تقريب أعداد صحيحة جديد ذا قيمة أكبر لدالة الـــهدف فيعتـــبر كحـــد أدنـــى جديد ويلغى بالتالى النموذج الذى نتج عنه الحـــد الأدنـــى القديـــم ، وكذلـــك جميع النماذج التى تعطى تقريباً ذا قيمة لدالـــة الـــهدف أصغـــر مـــن الحـــد الأدنى الجديـــد .

وتستمر عملية التفريع إلى أن تختفـــى النمـــاذج التـــى لـــها تقريـــب أعداد غير صحيحة ، وفى هذه الحالة ، فـــإن حـــل الحـــد الأدنـــى الحـــالى هو الحل الأمثل لنموذج الأعـــداد الصحيحـــة .

وفى حالة تصغير دالة الهدف تطبق الطريقـــة نفســـها ، مـــا عـــدا أن الحد الأعلى يستخدم ، لذلـــك فـــإن قيمـــة حـــل الأعـــداد الصحيحـــة الأول يصبح حداً أعلى للبرنامج ، وتلغى كـــل الـــبرامج التـــى تـــؤدى إلـــى قيـــم لدالة الهدف أكبر من الحد الأعلـــى .

مثـــال (١) :

نفرض أن لدينا البرنامج الخطى التالى :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$$

المطلوب : حل البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس .

الحـــــل :

بإهمال شرط الأعــداد الصحيحــة ، وباســتخدام طريقــة الســمبلكس الأساسية لحل البرنامج على النحــو التــالى :

يتم تحويل القيد إلى معادلة بإضافة متغير متمم وهو x_4 كما يلى :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$

وتكون جولات الحل على النحو التــالى :

الجولــة الأولــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	الثوابت
x_4 ←	3	2	3	1	8
$-Z$	4	2	1	0	0

بتطبيق قواعد طريقــــة الســمبلكس العاديــة نخــرج المتغــير x_4 وندخل المتغير x_1 بدلاً منه ، وننتقل إلى الجولــــة الثانيــة .

الجولــة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	الثوابت
x_1	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$-Z$	0	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{32}{3}$

وحيث أن معـاملات المتغـيرات غـير الأساسـية وهـى معـاملات المتغيرات x_4 , x_3 , x_2 بصف دالـة الـهدف ، (Z -) ، كلـها سـالبة ، فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل للبرنامج ، وهـو كمـا يلـى :

$$Z = 10.67 \quad , \quad x_1^* = \frac{8}{3} = 2.67$$

هذا الحل يعتبر حل أعداد غير صحيحة ، وحيث أن $2 < x_1^* < 3$ ، لذلك يستخدم تفريعين جديدين هما : $x_1 \geq 3$, $x_1 \leq 2$ وينشـأ لدينـا البرنامجين الفرعيين التاليين :

البرنامج الثالث	البرنامج الثانى
$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$	$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$
بشرط أن :	بشرط أن :
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$	$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$
$x_1 \geq 3$	$x_1 \leq 2$
x_3, x_2, x_1 أعداد صحيحة وغير سالبة	x_3, x_2, x_1 أعداد صحيحة وغير سالبة

بأخذ البرنامج الفرعى الثانى ، وإهمـال شـرط الأعـداد الصحيحـة نستخدم طريقة السمبلكس الأساسـية لحـل البرنـامج حيـث يتـم إضافـة متغير متمم لكل قيد على النحو التـالى :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 + x_5 = 2$$

الجولة الأولـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	3	2	3	1	0	8
x_5	1	0	0	0	1	2
- Z	4	2	1	0	0	0

بتطبيق قواعد طريقـــة الســمبلكس الأساســية نخــرج المتغــير x_5 وندخل المتغير x_1 بدلاً منـــه .

الجولة الثانيـة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	0	2	3	1	- 3	2
x_1	1	0	0	0	1	2
- Z	0	2	1	0	- 4	- 8

ثم نخرج المتغير x_4 وندخل المتغير x_2 بـــدلاً منــه .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
x_1	1	0	0	0	1	2
$-Z$	0	0	-2	-1	-1	-10

نلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية وهى : x_3 , x_4 , x_5 أصبح لها معاملات سالبة فى صف دالة الهدف ، $(-Z)$ ، فيكون الحل الحالى حلاً أمثل وهو :

$$Z = 10 \quad , \quad x_2^* = 1 \quad , \quad x_1^* = 2$$

وهذا الحل هو أول حل أعداد صحيحة يقابلنا ، لذلك فإن $Z = 10$ تصبح الحد الأدنى للنموذج المدروس ، وأن أى حل يؤدى إلى قيمة لدالة الهدف ، Z ، أقل من 10 يجب أن يلغى .

ننتقل بعد ذلك إلى البرنامج الفرعى التالى وهو البرنامج الثالث، حيث :

البرنامج الثالث :

يتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، وبضرب طرفى القيد الثانى فى 1 - ، ثم بإضافة المتغيرات المتممة لقيود البرنامج نحصل على الشكل التالى :

$$Max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

بشرط أن :

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_5 = -3$$

ثم تستمر جولات الحل على النحـــو التـــالى :

الجولة الأولـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	3	2	3	1	0	8
x_5	-1	0	0	0	1	-3
-Z	4	2	1	0	0	0

بظهور قيمة سالبة فى عمود الثوابت ، فيكون الحل الحالى غير ممكن، لذلك سوف نستخدم طريقة مبدول السمبلكس حيث نخرج المتغير x_5 وندخل المتغير x_1 بدلاً منه كما يتضح فى الجولة التالية .

الجولة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_4	0	2	3	1	3	-1
x_1	1	0	0	0	-1	3
-Z	0	2	1	0	4	-12

بظهور قيمة سالبة وهى (1 -) فى عمود الثوابت بصف x_4 تجعل الحل الحالى غير ممكن ، وبتطبيق قواعد طريقة مبدول السمبلكس ، فيكون صف المتغير x_4 هو الصف المحورى ويعنى ذلك أن المتغير x_4 هو المتغير الذى سوف يخرج ، ولتحديد العمود المحورى (أى عمود المتغير الداخل) نقسم عناصر صف (Z -) على عناصر الصف المحورى السالبة فقط ، وحيث لا توجد عناصر سالبة بصف x_4 للقسمة عليها ، فلا توجد إمكانية لتحويل الحل الحالى من حل غير ممكن إلى حل ممكن ، ويكون البرنامج الثالث ليس له حل .

وحيث أنه قد انتهت كل التفريعات الممكنة ولا توجد تفريعات تالية فيكون الحل الأمثل للنموذج هو التفريب الأول للبرنامج الثانى وهو كما يلى :

$$Z = 10 \quad , \quad x_2^* = 1 \quad , \quad x_1^* = 2$$

مثال (٢):

حل البرنامج الخطى التالى :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

x_2 , x_1 أعداد صحيحة ولا سالبية

الحـــــل :

بإهمال شـــرط الأعـداد الصحيحـــة وباســتخدام طريقـــة الســمبلكس الأساسية لحل البرنامج ، حيث نضيف متغير متمم لكل قيـــد كمـــا يلـــى :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

وتستمر جولات الحل على النحــو التــالى :

الجولة الأولـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	الثوابت
x_3	2	1	1	0	6
← x_4	2	3	0	1	9
- Z	3	4	0	0	0

نخرج المتغير x_4 وندخل المتغير x_2 بـــدلاً منـــه ثـــم ننتقـــل إلـــى الجولة التاليـــة :

الجولة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	الثوابت
x_3	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	3
-Z	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	- 12

نخرج المتغير x_3 وندخل المتغير x_1 بـــدلاً منـــه وتكـــون الجولـــة التالية في الحل هـــى :

الجولة الثالثـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	الثوابت
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
-Z	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-12\frac{3}{4}$

وحيث أن المتغيرين غير الأساسيين وهما : x_3 , x_4 أصبح لهما معاملين سالبين فى صف (Z -) ، فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل للبرنامج وهو كما يلى :

$$Z = 12.75 \quad , \quad x_2^* = \frac{3}{2} = 1.5 \quad , \quad x_1^* = \frac{9}{4} = 2.25$$

وحيث أن الجزء الكسرى لـ x_2^* هو الأقرب إلى 0,5 ، لذلك يستخدم هذا المتغير لتكوين تفريعين جديدين هما : $x_2 \le 1$, $x_2 \ge 2$ وينشأ برنامجين فرعيين هما :

البرنامج الثالث	البرنامج الثانى
$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2$	$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2$
بشرط أن :	بشرط أن :
$2x_1 + x_2 \le 6$	$2x_1 + x_2 \le 6$
$2x_1 + 3x_2 \le 9$	$2x_1 + 3x_2 \le 9$
$x_2 \ge 2$	$x_2 \le 1$
x_1, x_2 أعداد صحيحة وغير سالبة	x_1, x_2 أعداد صحيحة وغير سالبة

بأخذ البرنامج الفرعى الثانى وإهمال شرط الأعداد الصحيحة ، نستخدم طريقة السمبلكس العادية لحل البرنامج على النحو التالى :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$x_2 + x_5 = 1$$

وتستمر جولات الحل وفقا لطريقة السمبلكس الأساسية على النحو التالى :

الجولة الأولى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	6
x_4	2	3	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	1
- Z	3	4	0	0	0	0

نخرج المتغير x_5 وندخل المتغير x_2 بدلا منه وننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	2	0	1	0	- 1	5
x_4	2	0	0	1	- 3	6
x_2	0	1	0	0	1	1
- Z	3	0	0	0	- 4	- 4

بتطبيق قواعد السمبلكس نخـــرج المتغـــير x_3 وندخـــل المتغـــير x_1 بدلاً منه وننتقل إلى الجولة التاليـــة .

الجولة الثالثـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2.5
x_4	0	0	- 1	1	- 2	1
x_2	0	1	0	0	1	1
- Z	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	- 11.5

بتطبيق قواعد الأمثلية يلاحظ أن المتغيرين غير الأساسيين وهما x_5 , x_3 لهما معاملين سالبين فى صف (Z -) ، فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل ، ومن ثم فإن الحل الأولى للبرنامج الفرعى الثانى هو :

$$Z = 11.5 \quad , \quad x_2^* = 1 \quad , \quad x_1^* = 2.5$$

بأخذ البرنامج الفرعى الثالث ، وإهمال شرط الأعداد الصحيحة، وباستخدام أسلوب السمبلكس بطريقة المبدول لحل البرنامج على الصورة التالية :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$-x_2 \leq -2$$

بإضافة المتغيرات المتممة إلى القيود الهيكلية السابقة تصبح كما يلى :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$
$$-x_2 + x_5 = -2$$

وتكون جولات السمبلكس على النحو التالى :

الجولة الأولــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	6
x_4	2	3	0	1	0	9
x_5	0	-1	0	0	1	-2
-Z	3	4	0	0	0	0

كما هو واضح فإن الحل الحالى غــير ممكــن نظــراً لوجــود قيمــة سالبـــة فـــى عمـــود الثوابـــت ، وبتطبيـــق قواعـــد طريقـــة مبـــدول السمبلكس نخرج المتغير x_5 وندخـــل المتغـــير x_2 بـــدلاً منـــه وننتقـــل إلى الجولة التاليـــة .

الجولة الثانيـــــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	2	0	1	0	1	4
x_4	2	0	0	1	3	3
x_2	0	1	0	0	-1	2
-Z	3	0	0	0	4	-8

الحل الحالى أصبح حـــلاً ممكنـاً نظـراً لأن قيـم عمـود الثوابـت أصبحت موجبة لذلك نطبق قواعد طريقـة السـمبلكس الأساسـية فنخـرج المتغير x_4 وندخل بدلاً منه المتغـير x_5 وتكـون الجولـة التاليـة كمـا يلى :

الجولة الثالثـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	3
x_5 ←	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	1
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	3
$-Z$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	-12

نخرج المتغير x_5 وندخل المتغير x_1 بـدلا منـه وننتقـل للجولـة التالية .

الجولة الرابعـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
x_3	0	0	1	-1	-2	1
x_1,	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	0	0	-1	2
-Z	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-12.5

حيث أن المتغيرات غير الأساسية أصبح لـــها معـــاملات ســـالبة فـــي صف دالة الهدف ، (Z -) ، فيكون الحـــل الحـــالى أمثـــل ، وبالتـــالى فـــإن التقريب الأولى للبرنامج الفرعى الثـــالث هـــو :

$$Z = 12.5 \quad , \quad x_2^* = 2 \quad , \quad x_1^* = 1.5$$

وحيث أن البرنامجين الثانى والثـــالث لـــهما تقريـــب أو حـــل غـــير صحيح ، لذا يمكن التفريع مـــن أحدهمـــا ، ونختـــار البرنـــامج الثـــالث لأن له قيمة أكبر لدالة الهدف (أقرب إلى الأمثليـــة) وهنـــا يكـــون :

$$1 < x_1^* < 2$$

ويكون البرنامجين الفرعيين الجديديـــن همـــا :

البرنامج الرابع	البرنامج الخامس
$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + 3x_2 \le 9$ $x_2 \ge 2$ $x_1 \le 1$ x_2, x_1 أعداد صحيحة ولا سلبية	$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$ بشرط أن : $2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + 3x_2 \le 9$ $x_2 \ge 2$ $x_1 \ge 2$ x_2, x_1 أعداد صحيحة ولا سلبية

بأخذ البرنامج الفرعى الرابع : بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة، وبضرب طرفى القيد الثالث فى (1 -) وإضافة المتغيرات المتممة لتحويل المتباينات إلى معادلات كما يلى :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\
2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9\\
-x_2 + x_5 &= -2\\
x_1 + x_6 &= 1
\end{aligned}
$$

وتجرى جولات الحل باستخدام طريقة جدول السمبلكس على النحو التالى :

الجولة الأولـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	0	6
x_4	2	3	0	1	0	0	9
x_5	0	-1	0	0	1	0	-2
x_6	1	0	0	0	0	1	1
-Z	3	4	0	0	0	0	0

ثم نخرج المتغير x_5 وندخل المتغير x_2 بدلاً منـــه وننتقـــل إلـــى جولـــة الحل التاليـــة .

الجولة الثانيـــــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	2	0	1	0	1	0	4
x_4	2	0	0	1	3	0	3
x_2	0	1	0	0	-1	0	2
x_6	1	0	0	0	0	1	1
-Z	3	0	0	0	4	0	-8

نخرج المتغير x_4 وندخل المتغير x_5 بدلاً منه وننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	3
x_5	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	1
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	3
x_6 ←	1	0	0	0	0	1	1
$-Z$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	-12

ثم نخرج المتغير x_6 وندخل المتغير x_1 بدلا منه وننتقل للجولة التالية .

الجولة الرابعة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_1	1	0	0	0	0	1	1
$-Z$	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{37}{3}$

بتطبيق قواعد الأمثلية يلاحظ أن الحل الحالى هو الحل الأمثل ، ويكون التقريب الأولى للبرنامج الفرعى الرابع كما يلى :

$$Z = 12.33 \quad , \quad x_2^* = 2.33 \quad , \quad x_1^* = 1$$

نتجه بعد ذلك إلى البرنامج الفرعى الخامس .

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، ويضرب طرفى كل من القيدين الثالث والرابع فى (1 -) ثم بإضافة المتغيرات المتممة لتحويل المتباينات إلى معادلات نحصل على ما يلى :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$
$$-x_2 + x_5 = -2$$
$$-x_1 + x_6 = -2$$

تستمر بعد ذلك جولات الحل على النحـــو التـــالى :

الجولة الأولـــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	0	6
x_4	2	3	0	1	0	0	9
x_5	0	-1	0	0	1	0	-2
x_6	-1	0	0	0	0	1	-2
-Z	3	4	0	0	0	0	0

بوجود قيم سالبة فى عمود الثوابت يكون الحـــل غـــير ممكـــن ، لـــذا نطبق قواعد طريقة مبـــدول الـــمبلكس فيخـــرج المتغـــير x_5 ويدخـــل بدلاً منه المتغير x_2 ويتم الانتقال إلى الجولـــة التاليـــة :

الجولة الثانيـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	2	0	1	0	1	0	4
x_4	2	0	0	1	3	0	3
x_2	0	1	0	0	- 1	0	2
x_1	- 1	0	0	0	0	1	- 2
- Z	3	0	0	0	4	0	- 8

نخرج المتغير x_6 وتدخل المتغير x_1 بدلاً منه وننتقل إلـــى الجولـــة التالية.

الجولة الثالثـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
x_3	0	0	1	0	1	2	0
x_4	0	0	0	1	3	2	- 1
x_2	0	1	0	0	- 1	0	2
x_1	1	0	0	0	0	- 1	2
- Z	0	0	0	0	4	3	- 14

الحل الحالى غير ممكن نظـــراً لظـــهور قيمـــة ســـالبة فـــى عمـــود الثوابت (فى صـــف المتغـــير x_4) ، وبتطبيـــق قواعـــد طريقـــة مبـــدول السمبلكس فيكون الصف الثانى هو الصـــف المحـــورى ، ولتحديـــد العمـــود المحورى نقسم عناصر صـــف (Z -) علـــى عنـــاصر الصـــف المحـــورى السالبة ، فيلاحظ أنه لا توجد عناصر سالبة يمكـــن القســـمة عليـــها ويعنـــى ذلك أنه لا توجد إمكانية لتحويل الحل الحالى من حـــل غـــير ممكـــن إلـــى حل ممكن ، وعلى ذلك فإن البرنامج الخامس ليس لـــه حـــل .

وتستمر عملية التفريغ من أى من البرنامجين الثانى أو الرابع ، فنختـــار البرنامج الرابع حيث له قيمة أكبر لدالة الهدف ، وهنا يلاحظ أن :

$$2 < x_2^* < 3$$

ونحصل على برنامجين فرعيين جديدين كمـــا يلـــى :

البرنامج السادس	البرنامج السابع
$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2$	$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2$
بشرط أن :	بشرط أن :
$2x_1 + x_2 \le 6$	$2x_1 + x_2 \le 6$
$2x_1 + 3x_2 \le 9$	$2x_1 + 3x_2 \le 9$
$x_2 \ge 2$	$x_2 \ge 2$
$x_1 \le 1$	$x_1 \le 1$
$x_2 \le 2$	$x_2 \ge 3$
x_2, x_1 أعداد صحيحة ولا سلبية	x_2, x_1 أعداد صحيحة ولا سلبية

البرنامج الســادس :

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة وبضرب طرفـــى القيـد الثـالث فـــى (1 -) لتحويل المتباينة إلى صـــورة أقــل مـــن أو يســاوى (أى ≤) ، ثــم نضيف متغير متمم لكل قيد من القيود الخمسة نحصل علـــى مــا يلـــى :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$-x_2 + x_5 = -2$$

$$x_1 + x_6 = 1$$

$$x_2 + x_7 = 2$$

تستمر جولات الحل كما يلـــى :

الجولة الأولــــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	0	0	6
x_4	2	3	0	1	0	0	0	9
x_5	0	- 1	0	0	1	0	0	- 2
x_6	1	0	0	0	0	1	0	1
x_7	0	1	0	0	0	0	1	2
- Z	3	4	0	0	0	0	0	0

وفقا لقواعد طريقة مبدول السمبلكس نخرج المتغير x_5 وندخل المتغير x_2 بدلاً منه وننتقل إلى الجولة الثانية .

الجولة الثانية :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	2	0	1	0	1	0	0	4
x_4	2	0	0	1	3	0	0	3
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	2
x_6	1	0	0	0	0	1	0	1
x_7	0	0	0	0	1	0	1	0
-Z	3	0	0	0	4	0	0	-8

وحيث اختفت القيم السالبة فى عمود الثوابت ، لذلك ووفقا لقواعد طريقة السمبلكس الأساسية يخرج المتغير x_7 ويدخل بدلاً منه المتغير x_5 ، ويتم الانتقال إلى الجولة الثالثة .

الجولة الثالثـــــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	2	0	1	0	0	0	- 1	4
x_4	2	0	0	1	0	0	- 3	3
x_2	0	1	0	0	0	0	1	2
x_6	1	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	1	0	1	0
- Z	3	0	0	0	0	0	- 4	- 8

يتم إخراج المتغير x_6 وإدخال المتغير x_1 بدلاً منه وننتقل إلـــى الجولـــة التالية .

الجولة الرابعــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	0	0	1	0	0	- 2	- 1	2
x_4	0	0	0	1	0	- 2	- 3	1
x_2	0	1	0	0	0	0	1	2
x_1	1	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	1	0	1	0
- Z	0	0	0	0	0	- 3	- 4	- 11

وفقا لقواعد الأمثلية وحيث أن المتغيرات غير الأساسية أصبح لها معاملات سالبة فى صف (Z -) فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل .

ويكون التقريب الأولى للبرنامج السادس كما يلى :

$$Z = 11 \quad , \quad x_2^* = 2 \quad , \quad x_1^* = 1$$

وحيث أن هذا الحل هو أول حل أعداد صحيحة يقابلنا ، لذلك فإن $Z = 11$ يصبح الحد الأدنى للنموذج المدروس ، وأن أى حل يؤدى إلى قيمة لدالة الهدف ، Z ، أقل من 11 يجب أن يلغى .

ننتقل بعد ذلك إلى البرنامج التالى وهو :

البرنامج السابع :

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة وبضرب طرفى كل من القيدين الثالث والخامس فى (1 -) ثم بإضافة المتغيرات المتممة لقيود النموذج فإن :

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 \\
-x_2 + x_5 &= -2 \\
x_1 + x_6 &= 1 \\
-x_2 + x_7 &= -3
\end{aligned}$$

تستمر جولات الحل كما يلى :

الجولة الأولــــى :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	2	1	1	0	0	0	0	6
x_4	2	3	0	1	0	0	0	9
x_5	0	- 1	0	0	1	0	0	- 2
x_6	1	0	0	0	0	1	0	1
x_7 ←	0	- 1	0	0	0	0	1	- 3
- Z	3	4	0	0	0	0	0	0

بتطبيق قواعد طريقة مبدول الســـمبلكس يتـــم إخـــراج المتغـــير x_7 وإدخال المتغير x_2 بدلاً منه وننتقل إلى الجولـــة الثانيـــة للحـــل .

الجولة الثانيــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	2	0	1	0	0	0	1	3
x_4 ←	2	0	0	1	0	0	3	0
x_5	0	0	0	0	1	0	- 1	1
x_6	1	0	0	0	0	1	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	- 1	3
- Z	3	0	0	0	0	0	4	- 12

الحل الحـــالى أصبـــح حـــلاً ممكنـــاً ، وبتطبيـــق قواعـــد طريقـــة السمبلكس العادية يتم إخـــراج المتغـــير x_4 وإدخـــال المتغـــير x_7 بـــدلاً منه وننتقل إلى الجولة التاليـــة .

الجولة الثالثـــة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	3
x_7	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0
x_5	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	1
x_6	1	0	0	0	0	1	0	1
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	3
$-Z$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	0	-12

يتم إخراج المتغير x_7 وإدخال المتغـــير x_1 بـــدلاً منـــه وننتقـــل إلى الجولة التاليـــة .

الجولة الرابعة :

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الثوابت
x_3	0	0	1	-1	0	0	-2	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0
x_5	0	0	0	0	1	0	-1	1
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	1
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	3
-Z	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-12

كما هو واضح فإن الحل الحالى يعد هو الحل الأمثل ، ويكون التقريب الأولى للبرنامج السابع هو :

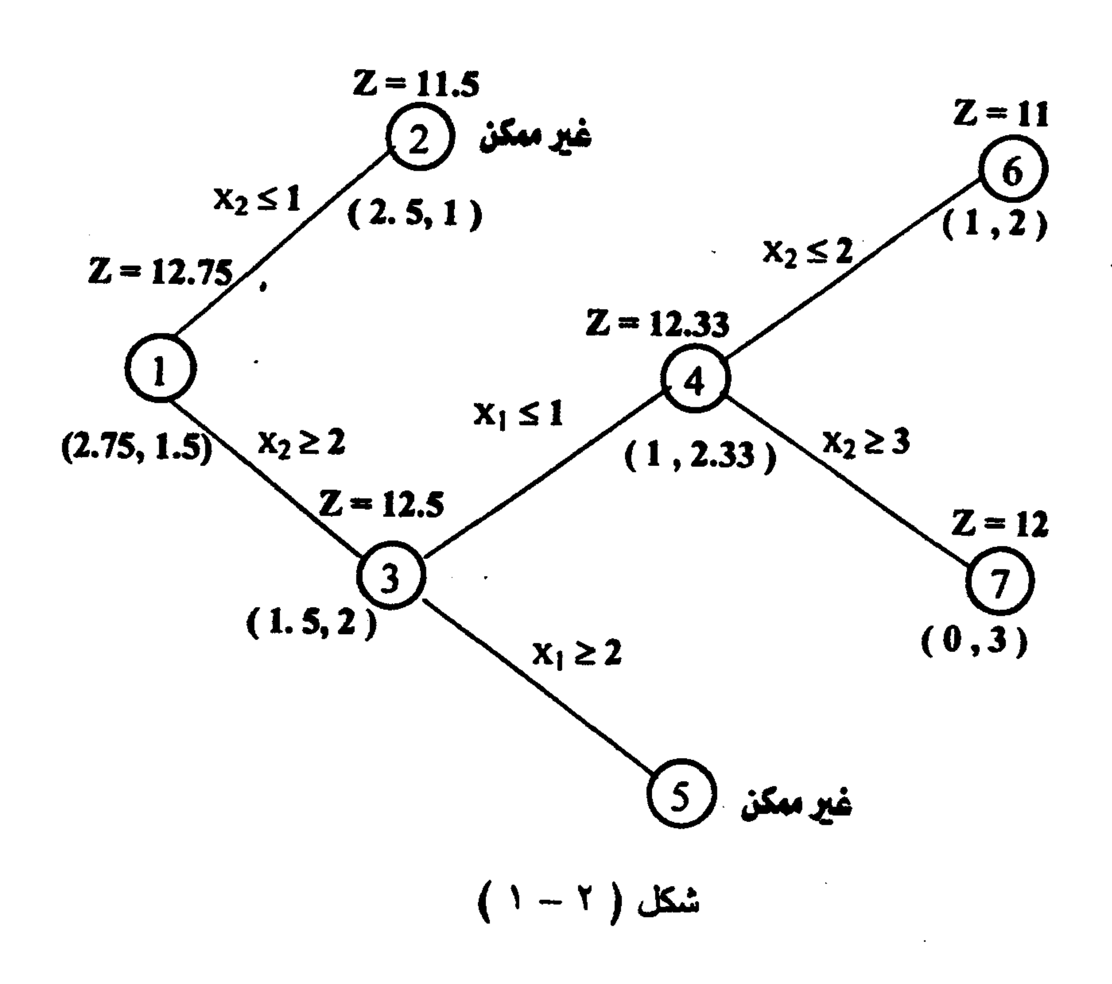
$$Z = 12 \quad , \quad x_2^* = 3 \quad , \quad x_1^* = 0$$

وحيث أن هذا الحل هو حل أعداد صحيحة وقيمة Z أكبر من الحد الأدنى الحالى ، تصبح $Z = 12$ هو الحد الأدنى الجديد ، ويحذف البرنامج الذى نتج عنه الحد الأدنى القديم وهو البرنامج السادس من أى اعتبار لاحق ، بالمثل يتم حذف البرنامج الثانى لنفس السبب .

وحيث أنه قد انتهت كل التفريعــــات الممكنــــة ولا توجــد تفريعــات تالية يكون الحل الأمثل للنموذج الأصلـــى هـــو تقريـــب البرنـــامج الســـابع وهو على النحو التـــالى :

$$Z^{*} = 12 \quad , \quad x_2^{*} = 3 \quad , \quad x_1^{*} = 0$$

ويمكن تلخيص نتائج التفريعات الســـابقة علـــى شـــكل شـــجرة كمـــا هو موضح فى الشـــكل (٢ – ١) .

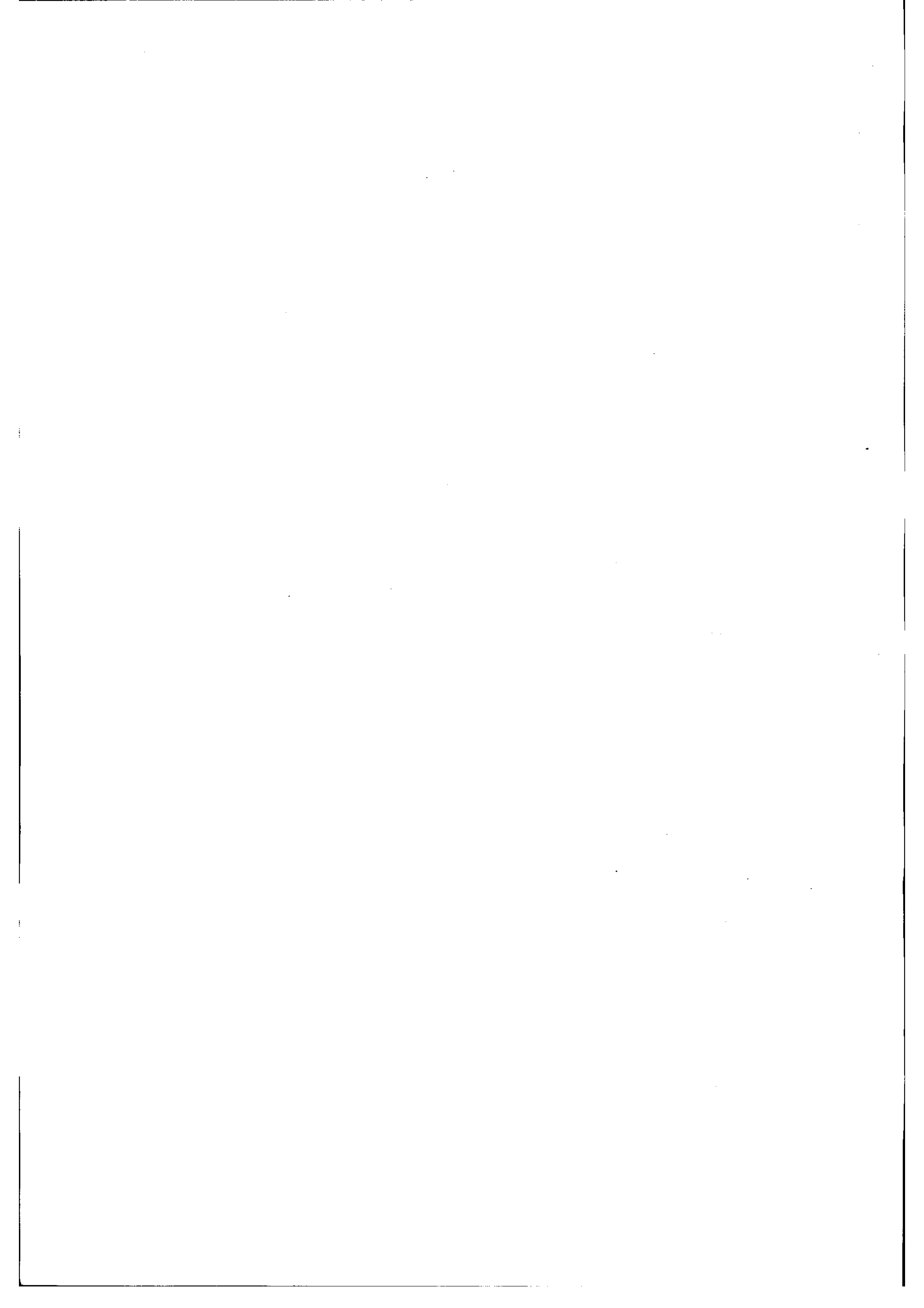


شكل (٢ – ١)

الباب الثالث

نماذج النقل والتخصيص الصياغة والحل

Transportation and Assignment Models: Formulation and Solution



الباب الثالث

نماذج النقل والتخصيص

- نماذج النقل
  - صياغة نماذج النقل
  - حل نماذج النقل
    - تحديد الحــل المبدئــى
    - اختبار امثلية الحل المبدئى وتحسينه إن أمكن
- نماذج التخصيص
  - صياغة نماذج التخصيص
  - حل نماذج التخصيص

(٣ - ١) نماذج النقل

تهتم نماذج النقل بتوزيع مجموعة من الموارد أو السلع المتاحة من جهات متفرقة للإنتاج (متمثلة فى المصانع أو المزارع أو الموانى) أو للتخزين (متمثلة فى مخازن فرعية) إلى بعض جهات الاستخدام (متمثلة فى الأسواق أو منافذ للبيع) .

ويتكون نموذج النقل من عدة عناصر هى :

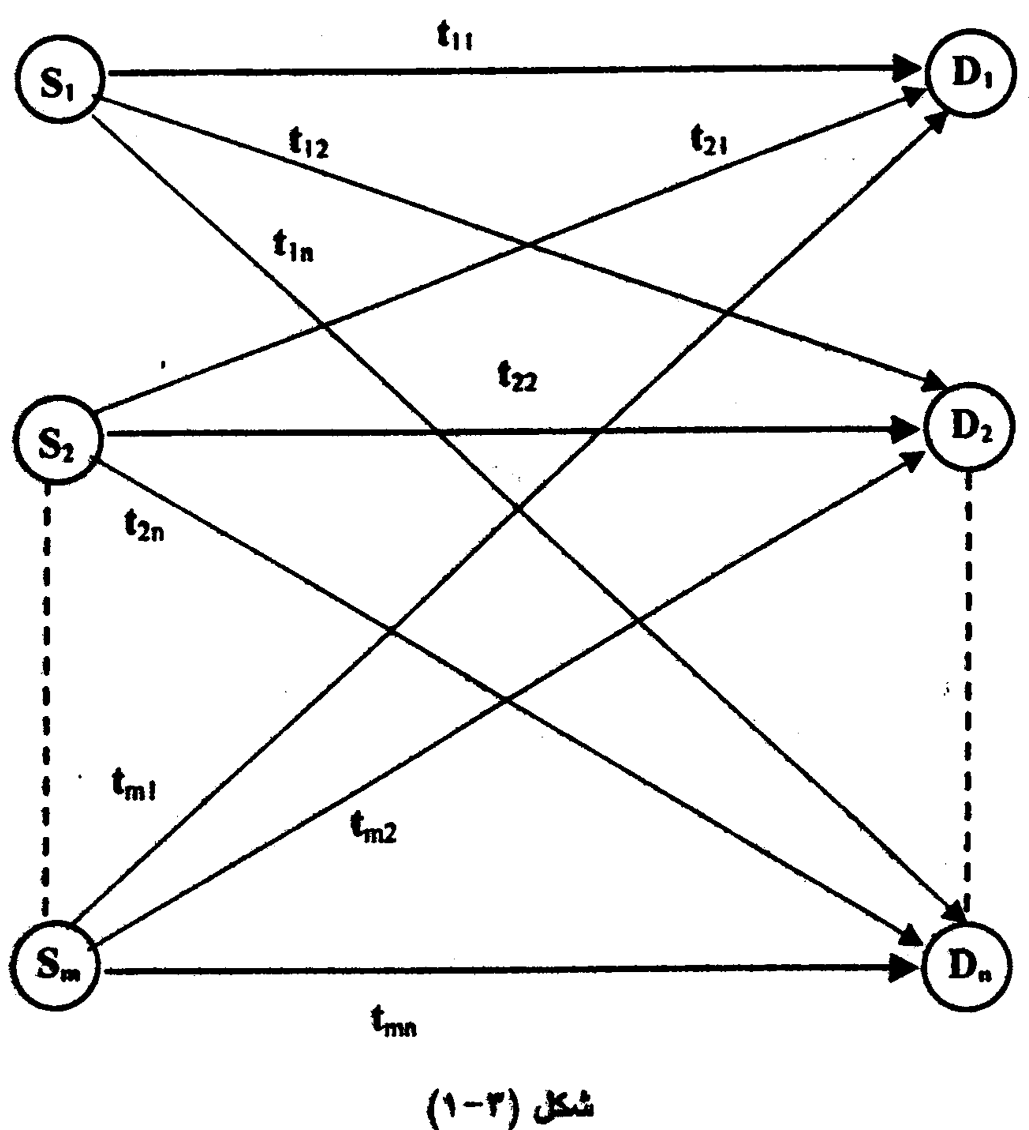
أ – **جانب العرض** : ويتمثل فى عدد m من مصادر عرض السلعة والتى يتوافر لدى كل منها $(i = 1 , 2, \ldots , m)$, S_i من الكميات المتاحة من السلعة .

ب – **جانب الطلب** : ويتمثل فى عدد n من جهات استخدام السلعة والتى يبلغ احتياج كل منها $(j = 1 , 2, \ldots, n)$, D_j من السلعة .

جـ – **جانب التكلفة** : ويتمثل فى المتغير t_{ij} ، حيث :

$(i = 1, 2, \ldots , m ; j = 1, 2, \ldots , n)$ والذى يشير إلى تكلفة نقل الوحدة من المصدر i إلى جهة الاستخدام j ويمكن أن يمثل هذا المتغير التكاليف المتغيرة للإنتاج أو للشراء أو للنقل أو بعضها أو كلها .

ويمكن تمثيل عناصر نموذج النقل بيانياً بالشكل التالى :



شكل (٣-١)

(٣-١-١) صياغة نماذج النقل

تتحدد العلاقة بين عناصر نموذج النقل على أساس أن الهدف هو تخصيص الوحدات المتاحة من السلعة من المصادر المختلفة إلى جهات الاستخدام المختلفة بطريقة تستنفذ المعروض من السلعة من

ناحية ، كما تستوفى احتياجات الطلب من ناحية أخرى ، على أن يتم ذلك بطريقة تضمن تحقيق الحد الأدنى من إجمالى تكاليف النقل .

ومن ثم فإن المتغيرات القرارية فى نموذج النقل تكون على النحو التالى :

x_{11} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 1 إلى جهة الاستخدام 1

x_{12} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 1 إلى جهة الاستخدام 2

⋮

x_{1n} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 1 إلى جهة الاستخدام n

بالمثل فإن :

x_{21} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 2 إلى جهة الاستخدام 1

x_{22} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 2 إلى جهة الاستخدام 2

⋮

x_{2n} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر 2 إلى جهة الاستخدام n

⋮

x_{mn} : تعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر m إلى جهة الاستخدام n

وبصفة عامة فإن المتغيرات القرارية تأخذ الصورة :

$$x_{ij} \ , \ (i = 1 , 2, \ldots , m ; j = 1, 2, \ldots , n)$$

وتعنى الكمية التى ينبغى نقلها من المصدر i إلى جهة الاستخدام j .

ويمكن تصوير عناصر نموذج النقل فى الجـــدول التـــالى :

الاستخدامات (إلــى) / المصادر (من)	1	2	3	....	n	العرض
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	....	x_{1n}	S_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	....	x_{2n}	S_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	....	x_{mn}	S_m
الطلب	D_1	D_2	D_3	....	D_n	

ويكون الشكل النمطى لصياغة نموذج النقـــل كبرنـــامج خطـــى علـــى النحو التـــالى :

المطلوب إيجاد قيم x_{ij} , $(i = 1 , 2, \ldots , m ; j = 1, 2, \ldots , n)$ التى تحقق الحد الأدنى لدالة الهدف Z ، أى التى تحقق مـــا يلـــى :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = \; & t_{11} x_{11} + t_{12} x_{12} + \ldots + t_{1n} x_{1n} \\ & + t_{21} x_{21} + t_{22} x_{22} + \ldots + t_{2n} x_{2n} \\ & \vdots \\ & + t_{m1} x_{m1} + t_{m2} x_{m2} + \ldots + t_{mn} x_{mn} \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض :

$$x_{11} + x_{12} + \dots\dots\dots\dots + x_{1n} \leq S_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \dots\dots\dots\dots + x_{2n} \leq S_2$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \dots\dots\dots\dots + x_{mn} \leq S_m$$

قيود الطلب :

$$x_{11} + x_{21} + \dots\dots\dots\dots + x_{m1} \geq D_1$$
$$x_{11} + x_{21} + \dots\dots\dots\dots + x_{m2} \geq D_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots\dots\dots\dots + x_{mn} \geq D_n$$

قيد عدم السلبية : $x_{ij} \geq 0 , (i = 1 , 2, \dots , m ; j = 1 , 2, \dots , n)$

ويمكن تلخيص صياغة نموذج النقل كمـــا يلـــى :

المطلوب إيجاد $x_{ij} \; , (i = 1 , 2, \dots , m ; j = 1 , 2, \dots , n)$

التى تجعل :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

بشرط أن :

قيود العرض : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i \; , \qquad (i = 1, 2, \dots , m)$

قيود الطلب : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j \,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$

قيد عدم السلبية : $x_{ij} \geq 0 \;, (i = 1, 2, \ldots, m \,; j = 1, 2, \ldots, n)$

ويلاحظ أن قيود العرض تعنى أن جملة الكميات المعروضة من المصدر i إلى جميع جهات الاستخدام يجب ألا تتجاوز الكمية التى ينتجها (أو يشحنها) المصدر i ، بينما قيود الطلب تعنى أن جملة الكميات التى تنقل (أو تشحن) إلى جهة الاستخدام j من جميع مصادر العرض يجب ألا تقل عن احتياجات جهة الاستخدام j .

وتجدر الإشارة إلى أنه إذا تعذر نقل السلعة من مصدر i إلى جهة استخدام معينة j لأسباب طبيعية أو اقتصادية أو حتى سياسية ، ففى هذه الحالة نفترض تكلفة نقل t_{ij} كبيرة جداً لنقل الوحدة من المصدر i إلى جهة الاستخدام j .

وفى التطبيقات العملية ، لا يمكن أن يكون لنموذج النقل حل أساسى ممكن إذا لم يكن إجمالى العرض يساوى على الأقل إجمالى الطلب ، أى أن :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i \geq \sum_{j=1}^{n} D_j$$

وتبسط عادة أساليب الحل بفرض أن :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

وبناءً على ما سبق ذكره ، فإن نموذج النقل يأخذ الصورة القياسية التالية :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \, x_{ij} \qquad (1)$$

بشرط أن :

قيود العرض: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \,, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2)$

قيود الطلب : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \,, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (3)$

قيد عدم السلبية : $x_{ij} \geq 0 \,, (i = 1, 2, \ldots, m \,; j = 1, 2, \ldots, n) \quad (4)$

من القيدين (2) ، (3) نستنتج قيد ضمني خامس وهو :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (5)$$

وهذا القيد الضمني يشير إلى أنه يشترط لوجود حل أساسي ممكن لنموذج النقل أن يتوازن إجمالي العرض المتاح من السلعة لدى المصادر المختلفة مع إجمالي الطلب على السلعة لدى جهات الاستخدام المختلفة .

وفي الواقع العملي فإن هذا الشرط قد لايتحقق في أغلب الأحوال إذ قد تزيد الكميات المعروضة من السلعة عن الكميات المطلوبة منها ، ويكون هناك بالتالي فائض في العرض ، وفي هذه الحالة نفترض

وجود جهة استخدام وهمية (أى سوق وهمى) يعادل الطلب فيها العرض الفائض ، أو قد يحدث العكس ، وتقل الكميات المعروضة لدى المصادر المختلفة عن الكميات المطلوبة لدى جهات الاستخدام المختلفة، ويكون هناك عجز ، وفى هذه الحالة يفترض وجود مصدر (أى مصنع) وهمى يعادل العرض فيه الطلب الزائد .

ويمثل الطلب الوهمى المتغير المتمم لتحويل متباينة العرض إلى معادلة ، بينما يمثل العرض الوهمى المتغير المتمم لتحويل متباينة الطلب إلى معادلة .

مثال (١) :

تدير الهيئة العامة لصناعة الأسمنت أربعة مصانع بالسويس وطره وحلوان وأسيوط تبلغ طاقتها الإنتاجية السنوية القصوى (بآلاف الأطنان) 500 , 600 , 400 ,800 على الترتيب .

وترغب الهيئة فى تسليم الأسمنت إلى مناطق التوزيع الإقليمية بالقاهرة والإسكندرية وطنطا وأسوان ، وتبلغ الاحتياجات الفعلية السنوية لهذه المناطق (بآلاف الأطنان) : 900 , 300 , 700 , 800 على الترتيب .

وقد كانت تكلفة نقل الوحدة (بالألف طن) من جهات الإنتاج إلى مراكز التوزيع الرئيسية (بالألف جنيه) كما يلى :

المصادر (من) \ الاستخدامات (إلـى)	القاهرة	الإسكندرية	طنطا	أسوان
السويس	30	40	35	65
طـــره	15	32	27	62
حلـوان	13	35	30	60
أسيوط	50	58	53	20

المطلوب : صياغة النموذج فى صورة برنـــامج خطـــى .

الحـــــل :

حيث أن إجمالى الكميات المعروضة من المصـــانع هـى :

(ألف طن) 2300 = 800 + 400 + 600 + 500

إجمالى الكميات المطلوبة لمراكز التوزيـــع هــــى :

(ألف طن) 2700 = 800 + 700 + 300 + 900

ويلاحظ أن إجمالى الكميات المطلوبة لمراكز التوزيـــع تزيـد عـن الكميات المعروضة من المصانع ، لذلـــك ينبغـى إضافـــة مصنــع وهمـى (والذى يمثل استيراد) بطاقة إنتاجيـــة هــى :

(ألف طن) 400 = 2300 - 2700

وبتكلفة نقل إلى جميع مراكز التوزيع تساوى أصفـــار ، ويصبـح جـدول المعاملات الفنية لنموذج النقل كمـا يلـى :

الاستخدامات (إلـى) / المصادر (من)	القاهرة	الإسكندرية	طنطا	أسوان	إجمالى
السويس	30	40	35	65	500
طـــره	15	32	27	62	600
حلـوان	13	35	30	60	400
أسيوط	50	58	53	20	800
مصنع وهمـى	0	0	0	0	400
إجمالى الطلـب	900	300	700	800	

نفــترض أن x_{ij} , . ($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 1, 2, 3, 4$) تشير إلى كمية الأسمنت (بالألف طن) التى ينبغى نقلــها مــن المصــدر i إلى مركز التوزيع j ، ويكون المطلــوب هــو إيجــاد قيم x_{ij} التــى تحقق ما يلـى :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = \; & 30\,x_{11} + 40\,x_{12} + 35\,x_{13} + 65\,x_{14} \\ & + 15\,x_{21} + 32\,x_{22} + 27\,x_{23} + 62\,x_{24} \\ & + 13\,x_{31} + 35\,x_{32} + 30\,x_{33} + 60\,x_{34} \\ & + 50\,x_{41} + 58\,x_{42} + 53\,x_{43} + 20\,x_{44} \\ & + (0)\,x_{51} + (0)\,x_{52} + (0)\,x_{53} + (0)\,x_{54} \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 600$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 400$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 800$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 400$$

قيود الطلب :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 900$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 300$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 700$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 800$$

قيد عدم السلبية :

$$x_{ij} \geq 0 , \quad (i = 1, 2, \dots , 5 ; \; j = 1, 2, \dots , 4)$$

مثال (٢) :

بفرض أن هناك ثلاثة مناجم لإنتاج الفحم تقوم بتوزيع إنتاجها على أربعة مراكز توزيع رئيسية هى : A , B , C , D . فإذا كانت الطاقة الإنتاجية القصوى للمناجم (بالألف طن) سنوياً هى على الترتيب : 400 , 500 , 800 وكانت القدرة الإستيعابية السنوية

لمراكز التوزيع الرئيسية (بالألف طن) هى على الترتيب : , 150 600 , 350 , 400 علما بأن تكلفة إنتاج الطن يختلف باختلاف المنجم، وكذلك فإن سعر بيع الطن يختلف باختلاف مركز التوزيع .

وفيما يلى بيان بتكلفة إنتاج الطن بكل منجم وسعر بيع الطن بكل مركز توزيع ، وكذا تكلفة نقل الطن إلى كل مركز توزيع بالجنيه :

مركز التوزيع / المنجم	A	B	C	D	تكلفة إنتاج الطن
الأول	9	7	10	12	150
الثانى	6	10	8	9	130
الثالث	15	9	11	10	160
سعر بيع الطن	200	230	220	190	

المطلوب : صياغة النموذج فى صورة برنامج خطى .

الحل :

إجمالى الكميات المعروضة من المناجم هى :

400 + 500 + 800 = 1700 (ألف طن)

إجمالى الكميات المطلوبة فى مراكز التوزيع هى :

150 + 600 + 350 + 400 = 1500 (ألف طن)

وحيث أن إجمالى الكميات المعروضة أكبر من إجمالى الكميات المطلوبة لذلك يضاف مركز توزيع وهمى (الذى يمثل تصدير) بطاقة استيعابية هى :

$$1700 - 1500 = 200$$ (ألف طن)

لذلك فإن جدول المعاملات الفنية لنموذج النقل يأخذ الصورة التالية :

مركز التوزيع (إلى) / المنجم (من)	A	B	C	D	E (وهمى)	ت.إنتاج الطن	إجمالى الطلب
الأول	9	7	10	12	0	150	400
الثانى	6	10	8	9	0	130	500
الثالث	15	9	11	10	0	160	800
سعر بيع الطن	200	230	220	190	0		
إجمالى العرض	150	600	350	400	200		

نفرض أن x_{ij} , $(i = 1, 2, 3 \; ; j = 1, 2, \ldots, 5)$ تشير إلى كمية الفحم التى ينبغى شحنها سنويا من المنجم i إلى مركز التوزيع j ويصاغ النموذج على النحو التالى :

$$\begin{aligned}\text{Max } Z = [\, & 200 (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 230 (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ & + 220 (x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 190 (x_{14} + x_{24} + x_{34}) \\ & - [\, 150 (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 130 (x_{21} + x_{22} \\ & + x_{23} + x_{24}) + 160 (x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34})\end{aligned}$$

$$- [\, 9\,x_{11} + 7\,x_{12} + 10\,x_{13} + 12\,x_{14} + 6\,x_{21} + 10\,x_{22} + 8\,x_{23} + 9\,x_{24} + 15\,x_{31} + 9\,x_{32} + 11\,x_{33} + 10\,x_{34}\,]$$

بشرط أن :

قيود العرض :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 500$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 800$$

قيود الطلب :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 600$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 350$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 400$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 200$$

قيد عدم السلبية :

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad (\, i = 1, 2, 3 \,;\; j = 1, 2, \ldots, 5\,).$$

يمكن اختصار دالة الهدف على النحـــو التـــالى :

$$\text{Max } Z = 41\,x_{11} + 64\,x_{21} + 25\,x_{31} + 73\,x_{12} + 90\,x_{22} + 61\,x_{32} + 60\,x_{13} + 82\,x_{23} + 49\,x_{33} + 28\,x_{14} + 51\,x_{24} + 20\,x_{34}.$$

ملحوظة : يلاحظ أن المتغيرات القرارية x_{ij} الخاصة بعمود مركز التوزيع الوهمى (أو الخاصة بالمصدر الوهمى) لا تظهر بدالة الهدف Z ، لأن معاملات تلك المتغيرات بدالة الهدف والتى تتمثل فى عناصر العائد أو التكلفة المرتبطة بها – سوف تكون أصفار ، ولكن هذه المتغيرات سوف تظهر فقط فى كل من قيود العرض وقيود الطلب وقيد عدم السلبية .

(٣ – ١ – ٢) حل نماذج النقل

بالرغم من أن نماذج النقل يمكن صياغتها كنموذج برمجة خطية إلا أنه يمكن الاستفادة من الخصائص المحددة والمبسطة لهذه النماذج فى تبسيط إجراءات الحل لها ، وتتلخص عملية حل نموذج النقل فى خطوتين رئيسيتين هما :

الخطوة الأولى : تحديد الحل المبدئى للنموذج .

الخطوة الثانية : اختبار أمثلية الحل المبدئى وتحسينه إن أمكن .

وسوف نتناول بالتفصيل هاتين الخطوتين .

أولا : تحديد الحل المبدئى

تهدف هذه الخطوة إلى تحديد الحل المبدئى لنموذج النقل والذى ينبغى أن يكون حلاً أساسياً وممكناً فى نفس الوقت بالإضافة إلى استيفائه لقيود العرض وقيود الطلب المختلفة ، ولتحقيق هذا الهدف يوجد عدة طرق مختلفة تتدرج فى كفاءتها نذكر منها :

أ – طريقة الركن الشمالى الغربـــى .

ب – طريقة أدنى تكلفـــة .

جـ – طريقة فوجل التقريبيـــة .

وسوف نتناول كل طريقة من هذه الطـــرق بـــالتفصيل .

أ – طريقة الركن الشمالى الغربـــى

Northwest – Corner Method

تتلخص هذه الطريقة لتحديد الحل المبدئى لنموذج النقل فى الخطوات التالية :

١ – نبدأ بالخلية التى تقع فى شمال غرب مصفوفـــة النقـــل وهـــى الخليـــة (1 , 1) ، ولتحديد الكمية التى توضع فى هـــذه الخليـــة تتـــم المقارنـــة بيـــن الكميـــة المعروضـــة مـــن المصـــدر 1 (أى الكميـــــة S_1) والكمية المطلوبـــة فى جهـــة الاســـتخدام 1 (أى الكميـــة D_1) ،

فإذا كانت $D_1 < S_1$ والذى يعنـــى أن الكمـــية المطلوبـــة فـــى جهة الاستخدام الأولى تقـــل عـــن الكميـــة المتاحـــة للمصـــدر الأول فيتم شغل الخلية (1 , 1) بمقـــدار D_1 ويرمـــز لـــهذه الكميـــة بـــالرمز x_{11} ويعنى ذلك استيفاء قيد العمود الأول وبالتـــالى يجـــب حذفـــه مـــن مصفوفة النقل ، أما الكمية المعروضة من المصـــدر 1 فـــى الصـــف الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها بالكمية x_{11} ، ثـــم نتحـــرك أفقيـــا إلى الخلية (2 , 1) فى الخطـــوة التاليـــة .

وإذا كانت $S_1 < D_1$ والذى يعنى أن الكمية المعروضة فى المصدر الأول تقل عن الكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام الأولى فيتم شغل الخلية (1 , 1) بمقدار S_1 والتى يرمز لها – كما بينا – بالرمز x_{11} ، ويعنى ذلك استيفاء قيد الصف الأول وبالتالى يجب حذفه من مصفوفة النقل ، أما الكمية المطلوبة فى جهة الاستخدام 1 الواقعة فى العمود الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها بالكمية x_{11} ، ثم نتحرك رأسيا إلى الخلية (1 , 2) فى الخطوة التالية .

أما إذا كانت $S_1 = D_1$ والذى يعنى أن الكمية المعروضة من المصدر الأول تساوى الكمية المطلوبة فى جهة الإستخدام الأولى فيتم شغل الخلية (1 , 1) بأى من المقدارين المتساويين والذى يرمز له بالرمز x_{11} ويعنى ذلك استيفاء قيد الصف الأول وقيد العمود الأول من مصفوفة النقل في نفس الوقت ، ومن ثم يتم حذف كلاً من الصف الأول والعمود الأول . ثم نتحرك قطرياً إلى الخلية (2 , 2) فى الخطوة الثانية ، ومن ثم فإننا نلاحظ دائماً أن :

$$x_{11} = \min (S_1 , D_1)$$

٢ – يتم الاستمرار فى هذه الخطوات بالانتقال التدريجى من خلال الخلايا الواقعة فى الشمال الغربى نحو الخلايا الواقعة فى الجنوب الشرقى من مصفوفة المعاملات الفنية لنموذج النقل حتى

يتم الانتهاء من توزيع (أو نقـــل) كـل الكميـات المعروضـة مـن المصادر المختلفة وفقا لاحتياجــات الطلــب فــى جـهات الاســتخدام المختلفـة .

مثـال (٣):

بفرض أن شركة لديها 3 مصانع لإنتاج الســكر هــى C , B, A وتبلغ طاقتها الإنتاجية الشهرية القصــوى (بــالطن) : 600 , 500 , 300 على الــترتيب .

وتقوم الشـــركة بتوزيــع إنتاجـها مــن الســكر إلــى 4 جـهات استهلاك رئيسية هـــى : 1 , 2 , 3 , 4 ، وتبلــغ احتياجاتــها الفعليـة الشهرية (بالطن) : 400 , 350 , 400 , 250 علــى الــترتيب .

وكانت تكلفة نقل الطن من السكر (بالجنيه) من جهات الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك الرئيسية كما يلى :

جهة الاستهلاك / المصنع	1	2	3	4
A	7	5	10	8
B	3	6	12	4
C	4	7	9	15

المطلوب : إيجاد الحل المبدئى لنموذج النقل مستخدماً طريقة الركن الشـمالى الغربى .

الحـــــــل :

إجمالى الكميات المعروضة من المصانع هى :

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 600 + 500 + 300 = 1400 \quad (\text{طن})$$

إجمالى الكميات المطلوبة لدى جهات الاستهلاك هى :

$$\sum_{j=1}^{4} D_j = 400 + 350 + 400 + 250 = 1400 \quad (\text{طن})$$

وحيث أن إجمـــالى الكميـــات المعروضـــة يتســاوى مــع إجمــالى الكميات المطلوبة فلسنا فى حاجة إذن لإضافــة مصنــع وهمــى أو ســوق وهمى .

وتبــدأ خطوات الحل بشغل الخلية (1 , 1) وذلــك بالمقارنــة بيــن D_1 , S_1 واختيار أيهما أقل لشغل الخليــة بالكميــة x_{11} ، حيــث :

$$x_{11} = \min\ (S_1 , D_1) = \min\ (\ 600 , 400\ ) = 400$$

وبالتالى نشغل الخلية (1 , 1) بالكميــة 400 ، ثــم نحــذف العمــود الأول الذى تم استيفاؤه بالكامل ، وفى نفس الوقــت تخفــض الكميــة المعروضــة بالصف الأول بمقدار 400 وحدة ليصبــح إجمــالى المعــروض بــالصف الأول بالمصفوفة هو 200 وحـــدة .

ثم ننتقل إلى الخلية (2 , 1) والتى ســوف يتــم شــغلها بالكميــة x_{12} حيث :

$$x_{12} = \min\ (S_1 , D_2) = \min (200 , 350) = 200 ,$$

ونحذف الصف الأول الذى تم استيفاؤه بالكامل ونخفض الكمية المطلوبة فى العمود الثانى بمقدار 200 وحدة ، ليصبح إجمالى الكمية المطلوبة فى العمود الثانى هو 150 وحدة .

ثم يتم الانتقال إلى الخلية (2 , 2) وتشغل بالكمية x_{22} ، حيث :

$$x_{22} = \min\ (S_2 , D_2) = \min (500 , 150) = 150 .$$

ونحذف العمود الثانى الذى تم استيفاؤه وتخفض الكمية المعروضة فى الصف الثانى بمقدار 150 وحدة ليصبح إجمالى العرض المتبقى 350 وحدة .

ثم ننتقل إلى الخلية (2 , 3) ويتم شغلها بالكمية x_{23} ، حيث :

$$x_{23} = \min (S_2 , D_3) = \min (350 , 400) = 350$$

ثم نحذف الصف الثانى الذى تم استيفاؤه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة فى العمود الثالث بمقدار 350 وحدة ليصبح إجمالى الطلب المتبقى فى هذا العمود 50 وحدة .

يتم شغل الخلايا المتبقية فى الصف الثالث والأخير بطريقة المتمم الحسابى كما يلى :

$$x_{33} = 50 \quad ، \quad x_{34} = 250$$

ويكون جدل الحل على النحو التالى :

جهة الاستهلاك / المصنع	1	2	3	4	إجمالى العرض
A	7 400	5 200	10	8	600
B	3	6 150	12 350	4	500
C	4	7	9 50	15 250	300
إجمالى الطلب	400	350	400	250	

ونكون بذلك قد انتهينا من تحديد الحل المبدئى لنمـــوذج النقــل وفقــا لطريقة الركن الشـــمالى الغربـــى ، ووفقـــاً لـــهذه الطريقـــة فـــإن إجمـــالى تكاليف النقل تتحدد وفقاً لقيمة دالة الهدف كمـــا يلـــى :

$$Z = 7(400) + 5(200) + 6(150) + 12(350) +$$

$$9(50) + 15(250) = 13100 \text{ (جنيه)}$$

ب – طريقة أصغر تكلفة Least – Cost Method

بالرغم من ســـهولة اســـتخدام الطريقـــة الســـابقة فـــى إيجـــاد الحـــل المبدئى إلا أنه يعاب عليها أنها لا تأخذ فى الاعتبـــار عـــامل التكلفـــة وهـــو الأهم ، لذلك فإن طريقة أصغر تكلفـــة تعتمـــد علـــى اختيـــار الخليـــة ذات التكلفة الأقل فى كل صف أو فى كل عمود أو فـــى المصفوفـــة كلـــها .

١ – طريقة أصغر تكلفة بكل صف

تبدأ هذه الطريقة باختيار الخلية التى لها أصغر تكلفة نقل فى الصف الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق ، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الأول من مصفوفة النقل ، ثم ننتقل إلى الصف الثانى ونختار الخلية التى لها أصغر تكلفة نقل ويتم شغلها ، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الثانى من مصفوفة النقل ، وهكذا حتى يتم الانتهاء من جميع صفوف مصفوفة النقل .

مثـال (٤):

اعتبر مصفوفة النقل الواردة فى مثـال (٣) وحـدد الحـل المبدئـى لنموذج النقل باستخدام طريقة أصغر تكلفة بكـل صـف .

الحــل :

المصنع \ جهة الاستهلاك	1	2	3	4	إجمالى العرض
A	7 250	5 350	10	8	600
B	3 150	6	12 100	4 250	500
C	4	7	9 300	15	300
إجمالى الطلب	400	350	400	250	

نبدأ بالصف الأول ونختار الخلية التى لها أقــل تكلفــة نقـل وهــى الخلية (2 , 1) ويتم شغلها بالكميـــة x_{12} ، حيــث :

$$x_{12} = \min (S_1 , D_2) = \min (600 , 350) = 350 \quad \text{(وحدة)}$$

ثم يتم حذف العمود الثانى الذى تـم اسـتيفاؤه بالكـامل ويخفـض إجمـالى العرض بالصف الأول بمقـدار 350 ليصبـح 250 وحـدة .

ثم ننتقل إلى الخلية التى لها أصغر تكلفة تاليـــة فـى الصـف الأول وهى الخلية (1 , 1) ويتم شغلها بالكميـــة x_{11} ، حيــث :

$$x_{11} = \min (S_1 , D_1) = \min (250 , 400) = 250 \quad \text{(وحدة)}$$

ويحذف الصف الأول نظراً لاستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبـــة فـى العمود الأول بمقدار 250 لتصبح : (وحدة) 150 = (250 – 400) .

وبعد حذف الصف الأول يتم الانتقال إلى الصف الثانى ونختار الخليـة التى لها أقل تكلفة وهى الخلية (1 , 2) ويتم شغلها بالكمية x_{21} ، حيث :

$$x_{21} = \min (S_2 , D_1) = \min (500 , 150) = 150 \quad \text{(وحدة)}$$

ويحذف العمود الأول الذى تم استيفاؤه بالكامل ويخفـض إجمـالى العـرض بالصف الثانى ليصبح :

$$(500 - 150) = 350 \quad \text{(وحدة)}$$

يتم الانتقال بعد ذلك إلـى الخليـة التـى لـها أدنـى تكلفـة تاليـة بالصف الثانى وهى الخلية (4 , 2) ويتم شـغلها بالكميـة x_{24} ، حيـث :

$$x_{24} = \min (S_2 , D_4) = \min (350 , 250) = 250 \quad \text{(وحدة)}$$

ويحذف العمود الرابع نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفـــض إجمـــالى العـــرض من الصف الثانى ليصبـــح :

$$(350 - 250) = 100 \quad \text{(وحدة)}$$

وحيث أنه تـــم حـــذف 3 أعمـــدة ولـــم يتبـــق ســـوى عمـــود واحـــد بمصفوفة النقل وهو العمود الثـــالث ، لذلـــك يتـــم شـــغل خلايـــاه بطريقـــة المتمم الحسابى كما يلـــى :

$$x_{23} = 100 \quad , \quad x_{33} = 300$$

وتكون قيمة دالة الهدف وفقا لهذه الطريقـــة هـــى :

$$Z = 7(250) + 5(350) + 3(150) + 12(100) +$$
$$4(250) + 9(300) = 8850 \quad \text{(جنيهاً)}$$

وكما هو واضح فإن قيمة دالـــة الـــهدف وفقـــا لـــهذه الطريقـــة تقـــل عنها فى طريقة الركن الشمالى الغربى لأنـــها تـــأخذ عنصـــر التكلفـــة فـــى الاعتبار عند اختيار الخلايا التى سوف يتـــم شـــغلها .

٢ – طريقة أصغر تكلفة بكل عمود

تختلف هذه الطريقة عـــن الطريقـــة الســـابقة حيـــث تبـــدأ باختيـــار الخلية التى لها أصغر تكلفة فى العمـــــود الأول ويتـــم شـــغل هـــذه الخليـــة بنفس الأسلوب السابق وبعد الانتهاء من العمود الأول وحذفـــــه ننتقـــل إلـــى العمود الثانى فالثالث وهكذا حتى يتم الانتهاء مـــن المصفوفـــة كلـــها .

مثـــال (٥):

أعتبر مصفوفة النقل الواردة فى مثـــال (٣) ، وحـــدد الحـــل المبدئـــى لنموذج النقل باستخدام طريقة أصغر تكلفة بكـــل عمـــود .

الحـــــــل :

مصفوفة النقل الواردة فى مثال (٣) هى :

جهة الاستخدام / المصنع	1	2	3	4	إجمالى العرض
A	7	5 / 350	10 / 100	8 / 150	600
B	3 / 400	6	12	4 / 100	500
C	4	7	9 / 300	15	300
إجمالى الطلب	400	350	400	250	

نبدأ بالعمود الأول ونختار الخلية التى لـــــها أقـــل تكلفـــة نقـــل وهـــى الخلية (1 , 2) ويتم شغلها بالكميـــــة x_{21} ، حيـــث :

$$x_{21} = \min (S_2 , D_1) = \min (500 , 400) = 400$$ (وحدة)

ويتم حذف العمـــــود الأول نظـــراً لإســـتيفائه بالكـــامل ويخفـــض إجمـــالى المعروض بالصف الثانى بالكميـــــة 400 ليصبـــح 100 وحـــدة .

يتم الانتقال بعد ذلك إلى العمود الثـاني وتختـار الخليـة التـي لـها أقل تكلفة نقل وهى الخلية (2 , 1) ويتم شـغلها بالكميـة x_{12} ، حيـث :

$$x_{12} = \min (S_1 , D_2) = \min (600 , 350) = 350 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف العمود الثانى نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفـض إجمـالى العـرض بالصف الأول بالكمية 350 ليصبـح 250 وحـدة .

ثم ننتقل إلى العمود الثالث وتختار الخليـة التـى لـها أصغـر تكلفـة وهى الخلية (3 , 3) ويتم شغلها بالكميـة x_{33} ، حيـث :

$$x_{33} = \min (S_3 , D_3) = \min (300 , 400) = 300 \quad (\text{وحدة})$$

ويتم حذف الصف الثـالث نظـراً لإسـتيفائه بالكـامل وتخفـض إجمـالى الكمية المطلوبة فى العمود الثالث بمقـدار 300 ليصبـح 100 وحـدة .

ثم ننتقل إلى الخلية التى لها أصغـر تكلفـة تاليـة بـالعمود الثـالث وهى الخلية (3 , 1) ويتم شغلها بالكميـة x_{13} ، حـيث :

$$x_{13} = \min (S_1 , D_3) = \min (250 , 100) = 100 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف العمود الثـالث نظـراً لإسـتيفائه بالكـامل ثـم يخفـض إجمـالى المعروض بالصف الأول بمقـدار 100 ليصبـح 150 وحـدة .

ونظراً لحذف جميع الأعمدة بمصفوفـة النقـل عـدا العمـود الرابـع فيتم شغل خلاياه بطريقة المتمم الحسـابى ، حيـث يلاحـظ أن :

$$x_{14} = 150 \quad (\text{وحدة}) \quad , \quad x_{24} = 100 \quad (\text{وحدة})$$

وتكون قيمة دالة الهدف هى :

$$Z = 5 (350) + 10 (100) + 8 (150) + 3 (400) +$$

4 (100) + 9 (300) = 8250 (جنيها)

وهى بالتأكيد سوف تقل أيضا عن قيمتها فى طريقة الركن الشمالى الغربى للسبب نفسه .

٣ - طريقة أصغر تكلفة بالمصفوفة عموماً

تبدأ هذه الطريقة باختيار الخلية التى لها أصغر تكلفة بالمصفوفة ككل ويتم شغلها بنفس الأسلوب السابق ، ثم ننتقل بعد ذلك إلى الخلية التى لها أصغر تكلفة تالية بالمصفوفة ككل ويتم شغلها وهكذا حتى يتم الانتهاء من المصفوفة ككل .

مثال (٦) :

أعتبر مصفوفة النقل الواردة فى مثال (٣) ، وحدد الحل المبدئى لنموذج النقل باستخدام طريقة أصغر تكلفة بالمصفوفة عموما .

الحل :

جهة الاستخدام / المصنع	1	2	3	4	إجمالى العرض
A	[7]	[5] 350	[10] 100	[8] 150	600
B	[3] 400	[6]	[12]	[4] 100	500
C	[4]	[7]	[9] 300	[15]	300
إجمالى الطلب	400	350	400	250	

نبدأ باختيار الخلية التى لها أصغر تكلفة بالمصفوفة ككل وهى الخلية (2 , 1) ويتم شغلها بالكمية x_{21} ، حيث :

$$x_{21} = \min (S_2 , D_1) = \min (500 , 400) = 400 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف العمود الأول نظراً لإستيفائه بالكامل وفى نفس الوقت يخفض إجمالى العرض بالصف الثانى بمقدار 400 ليصبح 100 وحدة .

بعد ذلك ننتقل إلى الخلية التى لها أصغر تكلفة تالية بالمصفوفة ككل وهى الخلية (4 , 2) ويتم شغلها بالكمية x_{24} ، حيث :

$$x_{24} = \min (S_2 , D_4) = \min (100 , 250) = 100 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف الصف الثانى نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفض – فى نفس الوقت – إجمالى الطلب بالعمود الرابع بمقدار 100 ليصبح :

$$250 - 100 = 150 \quad (\text{وحدة})$$

ثم ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة الأقل بالمصفوفة ككل وهى الخلية (2 , 1) ويتم شغلها بالكمية x_{12} ، حيث :

$$x_{12} = \min (S_1 , D_2) = \min (600 , 350) = 350 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف العمود الثانى نظراً لاستيفائه بالكامل ويخفض – فى نفس الوقت – إجمالى العرض بالصف الأول بمقدار 350 ليصبح :

$$600 - 350 = 250 \quad (\text{وحدة})$$

ثم ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة الأقل وهى الخلية (4 , 1) ويتم شغلها بالكمية x_{14} ، حيث :

$x_{14} = \min(S_1 , D_4) = \min(250 , 150) = 150$ (وحدة)

ويحذف العمود الرابع نظراً لإستيفائه بالكامل ويخفـــض إجمـــالى العـــرض بالصف الأول بمقدار 150 ليصبـــح :

$(250 - 150) = 100$ (وحدة)

وحيث أنه تم حذف جميع الأعمدة بالمصفوفة ما عدا العمود الثالث لذلك يتم شغل خلاياه بطريقة المتمم الحسابى حيث يلاحظ أن :

$x_{13} = 100$ (وحدة) , $x_{33} = 300$ (وحدة)

وتكون قيمة دالة الهدف فى هذه الحالة كما يلى :

$$Z = 5(350) + 10(100) + 8(150) + 3(400) + 4(100) + 9(300) = 8250$$ (جنيهاً)

وكما هو واضح فإن طريقة أقل تكلفة ، سواء بكل صف أو بكل عمود أو بالمصفوفة عموما ، سوف تقود حتماً على حل مبدئى قيمة دالة الهدف فيه أقل من قيمة دالة الهدف للحل المبدئى الذى يتم الحصول عليه بطريقة الركن الشمالى الغربى نظراً لأنها تأخذ عنصر التكلفة فى الاعتبار عند اختيار الخلية المرشحة لأن يتم شغلها .

جـ- طريقة فوجـل التقريبية Vogel's Approximation Method

تتلخص طريقة فوجل لإيجـاد الحـل المبدئـى لنمـوذج النقـل فـى الخطوات التاليـة :

١ – يحسب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة وذلك لكل صف وأيضا لكل عمود ويكتب هذا الفرق في نهاية كل صف وكل عمود ويرمز لهذا الفرق بالرمز d_1 ، هذا الفرق في التكلفة يمثل تكلفة الجزاء أو العقاب على عدم اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل .

٢ – يتم أخذ أكبر فرق مطلق للتكلفة ويحدد الصف أو العمود الذي ينتمي إليه أكبر فرق مطلق في التكلفة ثم تختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا الصف أو ذلك العمود ويتم شغلها ، وفي حالة تعادل أكثر من صف و / أو (and / or) عمود في قيمة أكبر فرق مطلق للتكلفة نختار أيها عشوائياً ثم نختار الخلية ذات الأدنى تكلفة بهذا الصف و / أو العمود ويتم شغلها.

٣ – يتم شغل الخلية التي تم اختيارها بنفس الطريقة السابقة على أساس الأصغر من الكميات المتاحة في مصدر العرض والكميات المطلوبة في جهة الاستخدام ، ثم نحذف الصف أو العمود الذي تم استيفاؤه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة في جهة الاستخدام أو الكمية المعروضة في مصدر العرض بتلك الكمية الأصغر لنحصل على الجزء المتبقي .

٤ – نعيد حساب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود ويرمز لهذا الفرق بالرمز d_2 ، للبدء في جولة جديدة من الخطوات السابقة ، وفي هذه الخطوة

يمكن الاقتصار فقط على كتابة الفروق الجديدة دونما الحاجة إلى إعادة كتابة الفروق التى تظل بدون تعديل فى الخطوة السابقة .

٥ – تستمر جولات الحل حتى يتم الانتهاء من توزيع كل الكميات المعروضة من المصادر المختلفة وفقاً لاحتياجات الطلب فى جهات الاستخدام المختلفة .

مثال (٧) :

أعتبر مصفوفة النقل الواردة فى مثال (٣) ، وحدد الحل المبدئى لنموذج النقل باستخدام طريقة فوجل التقريبية .

الحل :

نعيد كتابة مصفوفة النقل كما يلى :

المصنع \ جهة الاستخدام	1	2	3	4	إجمالى العرض	d_1	d_2	d_3	d_4
A	[7]	[5] 350	[10] 250	[8]	600	2	2	2	[5]
B	[3] 250	[6]	[12]	[4] 250	500	1	[3]		
C	[4] 150	[7]	[9] 150	[15]	300	3	3	3	3
إجمالى الطلب	400	350	400	250					

	1	2	3	4
d_1 :	1	1	1	[4]
d_2 :	1	1	1	
d_3 :	[3]	1	1	
d_4 :				

الجولة الأولى :

١ – تحسب الفروق المطلقة ، d_1 ، بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود ، حيث يلاحظ أن :

الأعمدة		الصفوف	
للعمود الأول :	$d_1 = 4 - 3 = 1$	للصف الأول :	$d_1 = 7 - 5 = 2$
للعمود الثانى :	$= 6 - 5 = 1$	للصف الثانى :	$= 4 - 3 = 1$
للعمود الثالث :	$= 10 - 9 = 1$	للصف الثالث :	$= 7 - 4 = 3$
للعمود الرابع :	$= 8 - 4 = 4$		

٢ – حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة هو 4 وهو ينتمى للعمود الرابع ، لذلك يتم اختيار الخلية ذات الأقل تكلفة بالعمود الرابع وهى الخلية (2 , 4) ويتم شغلها بالكمية x_{24} ، حيث :

$$x_{24} = \min (S_2 , D_4) = \min (500 , 250) = 250 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف العمود الرابع نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المعروضة بالمصنع الثانى لتصبح :

$$(500 - 250) = 250 \quad (\text{وحدة})$$

الجولة الثانية :

١ – تحسب الفروق المطلقة ، d_2 ، بين أدنى تكلفة والتكلفة التى تليها مباشرة لكل صف ولكل عمود ، حيث يلاحظ أن :

الأعمدة

للعمود الأول : $d_2 = 4 - 3 = 1$

للعمود الثانى : $= 6 - 5 = 1$

للعمود الثالث : $= 10 - 9 = 1$

الصفوف

للصف الأول : $d_2 = 7 - 5 = 2$

للصف الثانى : $= 6 - 3 = 3$

للصف الثالث : $= 7 - 4 = 3$

٢ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة متساو ويساوى 3 لذلك يتم اختيار أيهما عشوائيا ولتكن d_2 للصف الثانى وتختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا الصف وهى الخلية (1 , 2) ويتم شغلها بالكمية x_{21} ، حيث :

$$x_{21} = \min(S_2 , D_1) = \min(250 , 400) = 250 \quad (\text{وحدة})$$

ويحذف العمود الثانى نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المعروضة بجهة الاستخدام الأولى لتصبح كما يلى :

$$(400 - 250) = 150 \quad (\text{وحدة})$$

الجولة الثالثة :

١ - تحسب الفروق المطلقة ، d_3 ، بين أدنى تكلفة والتكلفة التى تليها مباشرة لكل صف ولكل عمود كما يلى :

الأعمدة

للعمود الأول : $d_3 = 7 - 4 = 3$

للعمود الثانى : $= 7 - 5 = 2$

للعمود الثالث : $= 10 - 9 = 1$

الصفوف

للصف الأول : $d_3 = 7 - 5 = 2$

للصف الثانى : $= 7 - 4 = 3$

٣ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة متساوٍ ويساوى 3 لذلك يتم اختيار أيهما عشوائياً ولتكن d_3 للعمود الأول وتختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا العمود وهى الخلية (1 , 3) ويتم شغلها بالكمية x_{31} ، حيث :

$$x_{31} = \min (S_3 , D_1) = \min (300 , 150) = 150$$ (وحدة)

ويحذف العمود الأول نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة بالمصنع الثالث لتصبح :

(300 - 150) = 150 (وحدة)

الجولة الرابعة :

١ - تحسب الفروق المطلقة ، d_4 ، بين أدنى تكلفة والتكلفة التى تليها مباشرة لكل صف ولكل عمود كما يلى :

الأعمدة	الصفوف
للعمود الأول : $d_4 = 7 - 5 = 2$	للصف الأول : $d_4 = 10 - 5 = 5$
للعمود الثانى : $= 10 - 9 =$ ١	للصف الثانى : $= 9 - 7 = 2$

٢ - حيث أن أكبر فرق مطلق للتكلفة ، d_4 ، يساوى 5 ينتمى للصف الأول لذلك يتم اختيار الخلية التى لها أصغر تكلفة بهذا الصف وهى الخلية (2 , 1) ويتم شغلها بالكمية x_{12} ، حيث :

$$x_{12} = \min (S_1 , D_2) = \min (600 , 350) = 350$$ (وحدة)

ثم يحذف العمود الثانى نظراً لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المعروضة بالمصنع الأول لتصبح :

(600 - 350) = 250 (وحدة)

الجولة الخامسة :

حيث تم حذف كافة الأعمدة بمصفوفة النقل ماعدا العمود الثالث، لذلك يتم شغل خلاياه بطريقة المتمم الحسابي ، حيث نجد أن :

$x_{31} = \min (250 , 400) = 250$ (وحدة)

$x_{33} = \min (150 , 150) = 150$ (وحدة)

وتكون قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي :

$$Z = 5(350) + 10(250) + 3(250) + 4(250) + 4(150) + 9(150) = 7950$$ (جنيهاً)

وكما هو واضح فإن قيمة دالة الهدف وفقاً لطريقة فوجل أقل من قيمتها في حالة استخدام طريقة أدنى تكلفة وهي أقل بدورها من قيمة دالة الهدف في حالة استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ، مما يؤكد أن طريقة فوجل تعد – في أغلب الحالات – أفضل من كل من طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة أقل تكلفة بمصفوفة النقل حيث أنها تعطي حلاً مبدئياً لنموذج النقل أكثر قرباً من الحل الأمثل ، إن لم يكن هو نفسه الحل الأمثل .

ثانياً : اختبار أمثلية الحل وتحسينه إذا لزم الأمر

للوصول إلى الحل الأمثل لنموذج النقل فإن ذلك يتطلب أولاً تحديد الحل المبدئي للنموذج الذي تم التوصل إليه بأي من طرق الحل السابقة ، ثم يلي ذلك اختبار أمثلية الحل المبدئي الذي تم التوصل إليه، فإذا وجد أن الحل المبدئي هو نفسه الحل الأمثل فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل المنشود لنموذج النقل ، أما إذا كان الحل المبدئي غير

أمثل فيلى ذلك عملية تحسين الحـل المبدئـى وذلـك مـن خـلال اختيـار المتغير الداخل والمتغير الخـارج والإنتقـال إلـى جولـة جديـدة تاليـة .
وسوف نتناول بالتفصيل كيفية اختبار أمثلية الحـل وكيفيـة تحسـين الحـل المبدئى إذا دعت الضـرورة .

أ – اختبار أمثلية الحـل

يتم اختبار أمثلية الحل المبدئى فـى نمـوذج النقـل بنفـس الفكـرة المتبعة فى طريقة السـمبلكس والتـى تعتمـد علـى فكـرة أثـر تحويـل المتغيرات غير الأساسية فى الحل إلى متغـيرات أساسـية وإن كـان ذلـك سيتم فى نموذج النقل بطريقة تتناسب مع خصـائص هـذا النمـوذج .

ويوجد عدة طرق يمكـن بواسـطتها اختبـار أمثليـة الحـل منـها طريقة الحلقات المغلقة والتـى تسـمى أحيانـا طريقـة محـور الارتكـاز وطريقة المضاريب ، وسوف نركز هنـا علـى الطريقـة الأولـى ، وهـى طريقة الحلقات المغلقة (أو محـور الارتكـاز) باعتبارهـا مـن الطـرق الأكثر شـيوعاً .

طريقة الحلقات المغلقة Stepping – stone Method

سوف نعتبر أن الخلايـا المشـغولة فـى مصفوفـة النقـل خلايـا أساسية وهى تناظر المتغيرات الأساسية فـى الحـل بطريقـة السـمبلكس ، بينما نعتبر باقى الخلايا غير المشغولة فـى مصفوفـة النقـل خلايـا غـير أساسية وهـى تنـاظر المتغـيرات غـير الأساسـية فـى الحـل بطريقـة السمبلكس ، وينبغى ملاحظة العلاقات التالية فـى مصفوفـة النقـل :

مجموع خلايا المصفوفة تساوى $m \times n$

مجموع الخلايا الأساسية (أى المشغولة) ينبغى أن تساوى $(m + n - 1)$

مجموع الخلايا غير الأساسية (أى غير المشغولة) تساوى

$$(mn - m - n + 1) = (m - 1)(n - 1)$$

حيث : m تشير إلى عدد صفوف مصفوفة النقل أى عدد مصادر العرض

n تشير إلى عدد أعمدة مصفوفة النقل أى عدد جهات الاستخدام .

فوفقاً لطريقة الحلقات المغلقة (أى طريقة محور الارتكاز) يتم إجراء عملية تقييم للخلايا غير الأساسية فى الحل المبدئى ، حيث يتم اختبار الأثر المحتمل على قيمة دالة الهدف ، Z ، عند تحويل الخلية غير الأساسية موضع التقييم إلى خلية أساسية وذلك بدراسة أثر زيادة تكلفة النقل بمقدار تكلفة نقل الوحدة من نفس الصف وهذا يستلزم بدوره زيادة التكلفة فى خلية أساسية فى نفس العمود ويتم ذلك فى سلسلة تكون إشاراتها كالتالى : + ، - ، + ، - ، ... ، وهكذا حتى نصل إلى نهاية الحلقة المغلقة وذلك حتى يتم إعادة التوازن لمصفوفة النقل .

فمسار الحلقة المغلقة يكون عبارة عن مضلع مغلق تكون نقطة البداية فيه هى الخلية غير الأساسية موضع التقييم بينما تتكون جميع أركانه الباقية من خلايا أساسية وتكون نقطة النهاية فى المسار هى نفس الخلية غير الأساسية موضع التقييم ، ويلاحظ أن لكل خلية غير

أساسية مسار مغلق واحد فى الحل ، ويراعى فـــى تشـكيل الحلقـــة المغلقــة ما يلى :

١ – كل زوج من الخلايا المتتالية يقع إما فى نفس الصف أو نفس العمود .
٢ – لا تقع ثلاث خلايا متتالية فى نفس الصف أو العمود .
٣ – تقع الخلايا الأولى والأخيرة فى نفس الصف أو نفس العمود .
٤ – لا تظهر أية خلية أكثر من مرة واحدة فى التسلسل .

والقيمة النهائية فى الحلقة المغلقة تعبر عـــن الأثـــر المحتمـــل علـــى دالة الهدف فى حالة تحويل الخلية موضع التقييم إلى خليـــة أساســـية وهـــو ما يعرف أحياناً بتكلفة الفرصة . ويجب التنويـــه إلـــى أن القيمـــة النهائيـــة فى الحلقة المغلقة لن تختلف إذا بدأنا مسار الحلقة مـــن العمـــود الـــذى تقـــع فيه الخلية موضع التقييم بدلاً مـــن الصـــف .

وحيث أن الهدف هو تصغير تكلفة النقل إلـــى حدهـــا الأدنـــى فـــإن الحل المبدئى يعد حل أمثل إذا كانت نتائج عمليـــة التقييـــم لجميـــع الخلايـــا غير الأساسية كلها قيماً موجبة أو صفـــر ، أمـــا فـــى حالـــة ظـــهور قيمـــاً سالبة فإن ذلك يعنى أن الحل المبدئى ليس هو الحـــل الأمثـــل حيـــث يمكـــن تخفيض قيمة دالة الهدف باختيـــار الخليـــة غـــير الأساســـية التـــى أعطـــت قيمة سالبة وتحويلها إلى خلية أساســـية .

فعلى سبيل المثال ، إذا كانت نتيجة التقييـــم لإحـــدى الخلايـــا غـــير الأساسية هـــى :

10 : فيعنى ذلك زيادة قيمـــة التكـــاليف بدالـــة الـــهدف بمقـــدار 10 جنيهات للوحدة الواحدة المنقولـــة .

0 : فيعنى ذلك أن قيمة التكاليف بدالـــة الـــهدف لـــن تتغـــير ســـواء بالزيادة أو النقصان لكل وحدة منقولـــة .

5 - : فيعنى ذلـــك نقـــص قيمـــة التكـــاليف بدالـــة الـــهدف بمقـــدار 5 جنيهات للوحدة الواحدة المنقولـــة .

وذلك عند تحويل تلك الخلية غير الأساسية إلـــى خليـــة أساســـية .

وفى حالة وجود أكثر من خليـــة غـــير أساســـية لـــها نتـــائج تقييـــم سالبة فتؤخذ أولاً الخلية التى لها أكـــبر قيمـــة ســـالبة ويتـــم تحويلـــها إلـــى خليـــة أساسية حيـــث أنهـــا تحقـــق خفـــض أكـــبر فـــى إجمـــالى تكـــاليف النقل بـــالنموذج .

مثـــال (٨) :

المطلوب اختبار أمثليـــة الحـــل المبدئـــى المتحصـــل عليـــه بطريقـــة فوجل الوارد فى مثـــال (٧) .

الحـــــــل :

جدول الحل المبدئى المتحصل عليه وفقا لطريقة فوجل فى مثال (٧) هو :

المصنع \ جهة الاستهلاك	1	2	3	4	إجمالى العرض
A	7	5 350	10 250	8	600
B	3 250	6	12	4 250	500
C	4 150	7	9 150	15	300
إجمالى الطلب	400	350	400	250	

سوف تتم عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل ، فعلى سبيل المثال ، فإن عملية التقييم للخلية (1 , 1) سوف تتم على النحو التالى :

الخلية (1 , 1) إذا تم تحويلها إلى خلية أساسية وشغلها بوحدة واحدة من المنتج فإن ذلك يؤدى إلى زيادة تكلفة النقل بمعدل 7 جنيهات للوحدة الواحدة المنقولة ، إلا أن هذا يستلزم إنقاص وحدة واحدة من الخلية (3 , 1) بتكلفة قدرها 10 جنيهات (لم يتم اختيار الخلية (2 , 1) لأنها لا تؤدى إلى حلقة مغلقة) ولتعويض هذا النقص فى الخلية (3 , 1) ينبغى زيادة وحدة واحدة فى الخلية (3 , 3) وبالتالى زيادة تكلفة النقل بمعدل 9 جنيهات للوحدة المنقولة ،

ويستلزم ذلك أيضـــا إنقــاص وحـــدة واحـــدة مـــن الخليـــة (1 , 3) بتكلفة قدرها 4 جنيهات ، كما يتضح من الجـــدول التـــالى :

المصنع \ جهة الاستهلاك	1	2	3	4
A	7 □+	5 350	10 − 250	8
B	3 250	6	12	4 250
C	4 − 150	7	9 + 150	15

ويكون مسار الحلقة المغلقة للخلية (1 , 1) علـــى النحـــو التـــالى :

الخليـة : (1 , 1) (1 , 3) (3 , 3) (3 , 1)

التكلفـة : 7 − 10 + 9 − 4 = 2

هذه النتيجة تعنى أنه إذا تم تحويـــل الخليـــة (1 , 1) مـــن خليـــة غير أساسية إلى خلية أساسية فإن ذلك يؤدى إلى زيـــادة تكلفـــة النقـــل فـــى النهاية بمعدل 2 جنيه لكل وحدة منقولة مـــن المنتـــج .

وفيما يلى نتائج عمليـــة التقويـــم لجميـــع الخلايـــا غـــير الأساســـية بمصفوفة النقـــل :

الخلية	مسار الحلقة المغلقة
(1 , 1)	(1 , 1) (1 , 3) (3 , 3) (3 , 1)
التكلفة	7 − 10 + 9 − 4 = 2
(1 , 4)	(1 , 4) (2 , 4) (2 , 1) (3 , 1) (3 , 3) (1 , 3)
التكلفة	8 − 4 + 3 − 4 + 9 − 10 = 2
(2 , 2)	(2 , 2) (1 , 2) (1 , 3) (3 , 3) (3 , 1) (2 , 1)
التكلفة	6 − 5 + 10 − 9 + 4 − 3 = 3
(2 , 3)	(2 , 3) (3 , 3) (3 , 1) (2 , 1)
التكلفة	12 − 9 + 4 − 3 = 4
(3 , 2)	(3 , 2) (3 , 3) (1 , 3) (1 , 2)
التكلفة	7 − 9 + 10 − 5 = 3
(3 , 4)	(3 , 4) (2 , 4) (2 , 1) (3 , 1)
التكلفة	15 − 4 + 3 − 4 = 10

وحيث أن نتائج عمليـــة التقييـم لجميـع الخلايـا غـير الأساسـية بمصفوفة النقل جميعها موجبة ، فيعنى ذلك أن الحـــل المبدئـى المتحصـل عليه بطريقة فوجل قد اجتاز اختبار الأمثلية ومن ثم فإنـــه يعـد حـل أمثـل وذلك لأن تحويل أى خلية غير أساسية إلى خليـــة أساسـية سـوف يـؤدى حتما إلى زيادة فى إجمالى تكلفة النقل بدالـــة الــهدف .

ملحوظـــة :

إذا أعطت أى خليـة غـير أساسـية نتيجـة تقييـم نهائيـة قيمتـها صفر، فإن هذه النتيجة تعنى أن تحويل تلك الخلية إلى خليـة أساسـية لـن يغير من قيمة دالة الهدف ومؤدى هذا أن الحـل المبدئـى المتحصـل عليـه سيظل حلا أمثلا ويوجد حـل أمثـل آخـر يتضمـن تلـك الخليـة كخليـة أساسية .

ب - تحسين الحل المبدئى

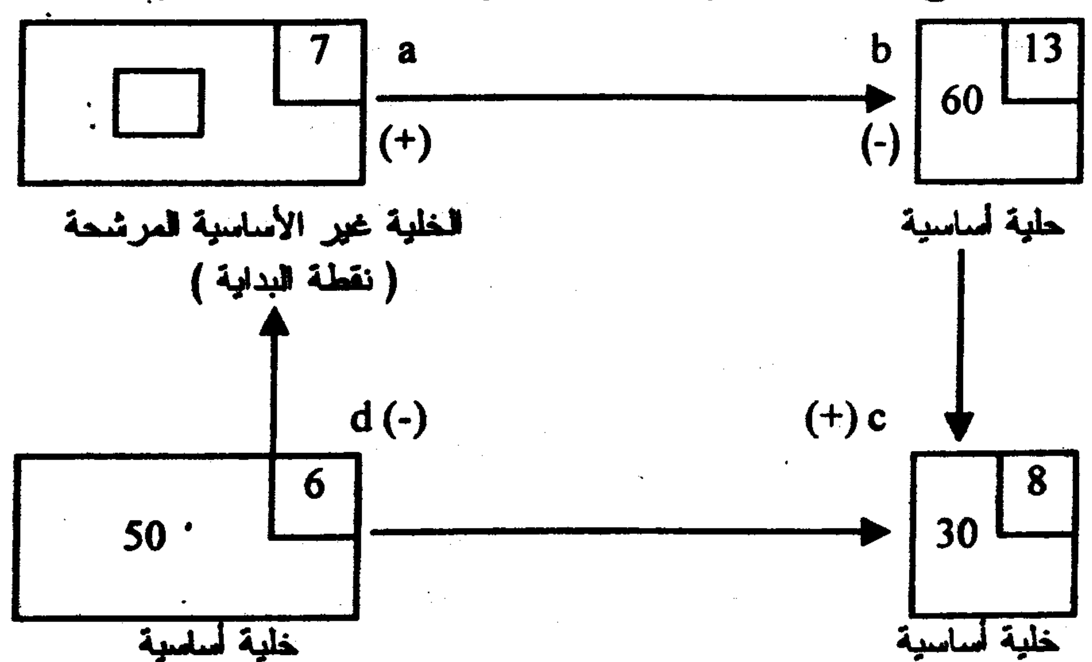
إذا أظهرت عملية التقييم للخلايا غـير الأساسـية بمصفوفـة النقـل للحل المبدئى قيمـة (أو قيـم) سـالبة فيعنـى ذلـك أن الحـل المبدئـى المتحصل عليه لم يجتز اختبـار الأمثليـة ولـم يعـد بذلـك حـل أمثـل ، ويستلزم الأمر تحسين هذا الحل عن طريق تحويـل بعـض الخلايـا غـير الأساسية التى أعطت معايير تقييم سالبة إلـى خلايـا أساسـية ويتـم ذلـك على النحو التـالى :

١ - يتم اختيار الخلية غير الأساسـية التـى تعطـى أكـبر قيمـة مطلقـة بإشارة سالبة لتحويلـها إلـى خليـة أساسـية وتنـاظر هـذه الخليـة المتغير الداخل فى طريقة السـمبلكس .

٢ - يتم اختيار الخلية الأساسية التـى سـوف تتحـول إلـى خليـة غـير أساسية على أساس تلك التى تصل إلـى القيمـة صفـر أولا بزيـادة قيمة الخلية غير الأساسية والتى تم تحويلها إلـى خليـة أساسـية فـى الخطوة (١) ويتـم ذلـك باختيـار أصغـر قيمـة مطلقـة للخلايـا

الأساسية ذات الإشارة السالبة فى مسار الحلقة المغلقة لتكون هى القيمة التى يتم بها شغل الخلية غير الأساسية التى تم ترشيحها للدخول فى الحل فى هذه الجولة .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا مسار الحلقة المغلقة التالية :



مسار الحلقة المغلقة هو :

المسار	a	b	c	d	
التكلفة	7	− 13	+ 8	− 6	= − 4

فى هذه الحالة سوف يتم شغل الخلية (a) المرشحة بالكمية 50 وحدة وهى أصغر قيمة مطلقة بإشارة سالبة أى تساوى

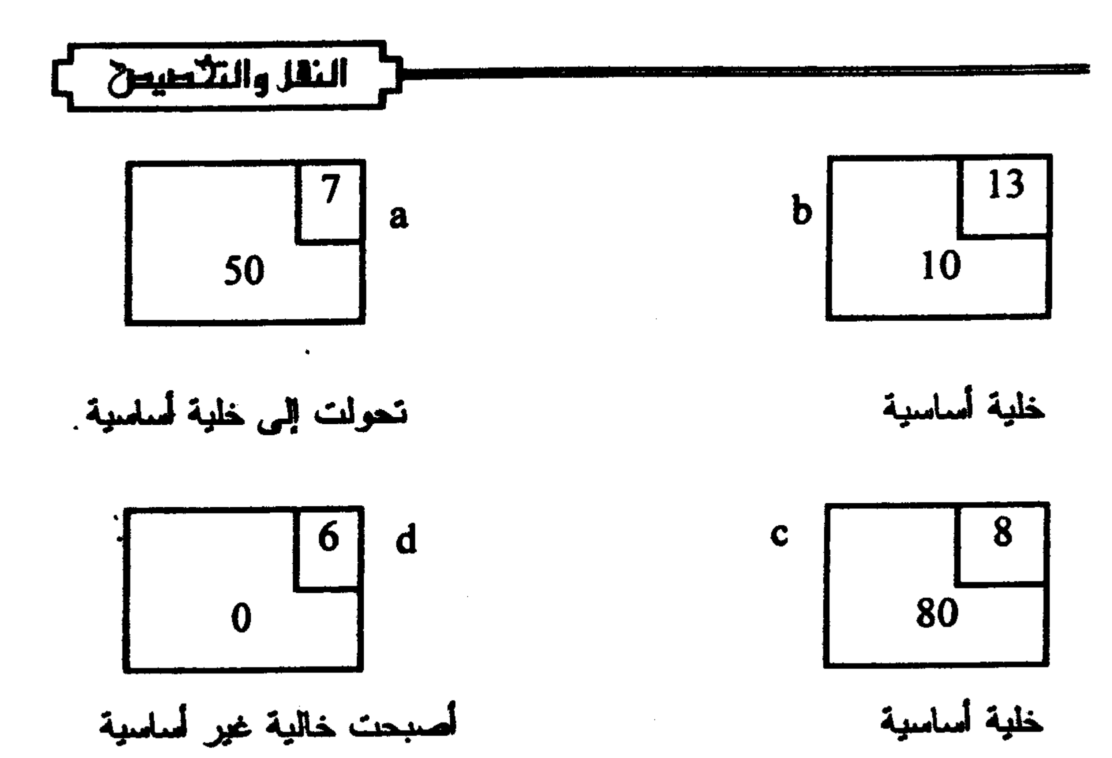
$$\min(-60, -50) = 50$$

مع تجاهل الإشارة السالبة . وتؤدى هذه الخطوة حتماً إلى تحويل الخلية غير الأساسية ، (a) ، المرشحة كمتغير داخل إلى خلية أساسية ، وفى المقابل سوف تتحول خلية أساسية وهى الخلية المشغولة بأصغر قيمة مطلقة بإشارة سالبة (وهى الخلية (d)) إلى خلية غير أساسية .

جـ - يتم الانتقال إلى الحل الجديد بتعديل الكميات المنقولة بالخلايا الواقعة على مسار الحلقة المغلقة فقط بالزيادة ثم بالنقص ثم بالزيادة .... وهكذا . أما الكميات الموجودة بالخلايا الأساسية غير الواقعة على هذا المسار فتظل كما هى بدون تعديل .

ففى المثال السابق ، يتم شغل الخلية غير الأساسية المرشحة وهى الخلية (a) بالكمية 50 وحدة ثم ننقص الكمية الموجودة بالخلية (b) بمقدار 50 وحدة لتصبح : (وحدات) 10 = 50 - 60 ثم تزيد الكمية الموجودة بالخلية (c) بمقدار 50 وحدة لتصبح : (وحدة) 80 = 50 + 30 ، ثم ننقص الكمية الموجودة بالخلية (d) بمقدار 50 وحدة لتصبح : 0 = 50 - 50 .

ومن ثم يصبح مسار الحلقة المغلقة بعد التعديل الجديد على النحو التالى :



ولبيان أثر هذا التعديل فى تحسين الحل المبدئى ، يلاحظ أن :

إجمالى تكاليف النقل فى مسار الحلقة المغلقة قبل التعديل هى :

$$13\ (60) + 8\ (30) + 6\ (50) = 1320$$ (جنيها)

بينما إجمالى تكاليف النقل فى مسار الحلقة المغلقة بعد التعديل هى :

$$7\ (50) + 10\ (13) + 8\ (80) = 1120$$ (جنيها)

ومعنى هذا أنه حدث تخفيض فى قيمة تكاليف النقل الخاصة بمسار الحلقة المغلقة المبين .

مثال (٩):

بفرض أنه يوجد ثلاث مزارع تنتج سلعة معينة وكانت الطاقة الإنتاجية السنوية القصوى (بالطن) للمزارع الثلاث هى على الترتيب 80 , 100 , 120 . تقوم هذه المزارع بنقل إنتاجها إلى ثلاثة

مراكز رئيسية للتوزيع طاقتها الإستيعابية السنوية القصوى (بالطن) هى على الترتيب 60 , 80 , 70 . فإذا علم أن تكلفة نقل الطن من المزارع إلى مراكز التوزيع (بالجنيه) موضحة بمصفوفة النقل التالية :

مركز التوزيع / المزرعة	1	2	3
1	118	120	114
2	113	122	123
3	110	115	117

المطلوب :

١ - تحديد الحل المبدئى لنموذج النقل للسلعة مستخدما طريقة فوجل .

٢ - اختبار أمثلية الحل المبدئى وتحسينه إذا لزم الأمر .

الحل :

١ - إجمالى الكميات المعروضة من السلعة من المزارع الثلاث هى :

80 + 100 + 120 = 300 (طن)

إجمالى الكميات المطلوبة من السلعة فى مراكز التوزيع الثلاثة هى :

60 + 80 + 70 = 210 (طن)

وحيث أن إجمالى الكميات المعروضة أكبر من إجمالى الكميات المطلوبة بمقدار 90 طن ، لذلك نضيف مركز توزيع وهمى (أى تصدير) بطاقة استيعابية تساوى 90 طن حتى يتساوى إجمالى الكميات المعروضة مع إجمالى الكميات المطلوبة .

جهة الاستخدام / المصنع	1	2	3	4	إجمالي العرض	d_1	d_2	d_3	d_4
1	[118]	[120]	[114]	[0] 80	80	[14]			
2	[113] 60	[122]	[123] 30	[0] 10	100	13	[13]	[9]	1
3	[110]	[115] 80	[117] 40	[0]	120	10	10	5	2
إجمالي الطلب	60	80	70	90					

		1	2	3	4
d_1	:	3	5	3	0
d_2	:	3	5	6	0
d_3	:	3	7	6	
d_4	:		[7]	6	

ويكون الحل المبدئى لنموذج النقل على النحـــو التـــالى :

$x_{14} = 80$, $x_{21} = 60$, $x_{23} = 30$, $x_{24} = 10$,

$x_{32} = 80$, $x_{33} = 40$.

وقيمة دالة الهدف ، Z ، (أى إجمالى تكاليف النقل) فى هذه الجولة هى :

$Z = 113(60) + 115(80) + 123(30) +$

$117(40) + 0(80) + 0(10) = 24350$ (جنيها)

٢ – لاختبار أمثلية الحـــل المبدئـــى المتحصـــل عليـــه باســـتخدام طريقـــة الحلقات المغلقة تتم عمليـــة التقييـــم لكافـــة الخلايـــا غـــير الأساســـية بمصفوفة الحل المبدئى الناتجة على النحـــو التـــالى :

الخلية	مسار الحلقة المغلقــة
(1 , 1)	(1 , 1) (1 , 4) (2 , 4) (2 , 1)
التكلفة	118 − 0 + 0 − 113 = 5
(1 , 2)	(1 , 2) (1 , 4) (2 , 4) (2 , 3) (3 , 3) (3 , 2)
التكلفة	120 − 0 + 0 − 123 + 117 − 115 = − 1
(1 , 3)	(1 , 3) (1 , 4) (2 , 4) (2 , 3)
التكلفة	114 − 0 + 0 − 123 = − 9

(2 , 2)	(2 , 2) (2 , 3) (3 , 3) (3 , 2)
التكلفة	122 − 123 + 117 − 115 = 1
(3 , 1)	(3 , 1) (3 , 3) (2 , 3) (2 , 1)
التكلفة	110 − 117 + 123 − 113 = 3
(3 , 4)	(3 , 4) (3 , 3) (2 , 3) (2 , 4)
التكلفة	0 − 117 + 123 − 0 = 6

وحيث أن عملية التقييم للخلايا غير الأساسية أعطت بعض القيم السالبة (الخليتان : (3 , 1) , (2 , 1)) ، لذلك يتم ترشيح الخلية (1 , 3) كمتغير داخل حيث أن لها أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة وهى القيمة (9 -) ويتم شغلها بالكمية x_{13} ، حيث :

x_{13} = min (- 80 , - 30) مع تجاهل الإشارة = 30

حيث يلاحظ أن : مسار الحلقة المغلقة قبل التعديل هو :

مركز التوزيع / المزرعة	3	4
1	114 (+)	0 (-) 80
2	123 (-) 30	0 (+) 10

بينما مسار الحلقة المغلقة بعد التعديل هو :

	3	4
1	114 30	0 50
2	123 0	0 40

حيث تحولت الخلية (3 , 1) إلى خلية أساسية بينما أصبحت الخلية (3 , 2) خلية غير أساسية ، فى حين تظل باقى خلايا مصفوفة النقل فى الحل المبدئى كما هى .

وتكون مصفوفة النقل للنموذج بعد هذا التعديل على النحو التالى :

مركز التوزيع / المزرعة	1	2	3	4	إجمالى العرض
1	118	120	114 30	0 50	80
2	113 60	122	123	0 40	100
3	110	115 80	117 40	0 90	120
إجمالى الطلب	60	80	70	90	

وفى ضوء هذا التعديل الذى أدخل علــى الحـل المبدئــى للنمـوذج يتم إعادة تقييم الخلية (2 , 1) والتى كان لــها (فــى الحـل المبدئــى قبـل التعديل) قيمة سالبة على النحــو التــالى :

الخلية	مسار الحلقة المغلقة				
(1 , 2)	(1 , 2)	(1 , 3)	(3 , 3)	(3 , 2)	
التكلفة	120	− 114	+ 117	− 115	= 8

أى أنه بعد التعديل الأخير الذى أدخل علــى الحـل المبدئــى الأولــى المتحصل عليه باستخدام طريقة فوجــل أصبــح للخليــة (2 , 1) نتيجــة تقييم نهائية موجبة وهى (8) بعد أن كــان لــها قبـل التعديـل نتيجــة تقييم نهائية سالبة وهــى (1 -) .

نستنتج من ذلك أن حل نموذج النقل بعد التعديــل أصبــح هـو الحـل الأمثل وهو كما يلــى :

$$x_{13} = 30 \;,\; x_{14} = 50 \;,\; x_{21} = 60 \;,\; x_{24} = 40 \;,$$
$$x_{32} = 80 \;,\; x_{33} = 40 \;.$$

وقيمة دالة الهدف ، Z ، (أى إجمالى تكاليف النقــل) هــى :

$$Z = 114(30) + 0(50) + 113(60) + 0(40) +$$
$$115(80) + 117(40) = 24080 \text{ (جنيها)}$$

وتشير هذه النتيجة إلى أن عملية تعديــل الكميــات الواجــب نقلــها فى مسار الحلقة المغلقة والــذى أدى إلــى تحويـل الخليــة (3 , 1) إلــى خلية أساسية (أى متغير داخــل) وتحويـل الخليــة (3 , 2) إلــى خليــة

غير أساسية (أى متغير خارج) أدت إلى تحسين الحل المبدئى حيث انخفضت قيمة دالة الهدف من 24350 إلى 24080 جنيهاً . وجدير بالذكر أن عملية التعديل هذه سوف تؤدى حتماً إلى تحسين الحل المبدئى .

ملاحظات هامة حول نموذج النقل

أولاً : إذا كانت دالة الهدف فى نموذج النقل فى اتجاه الحد الأقصى

يحدث هذا الوضع عندما تكون الإمكانية القصوى للإنتاج فى الفترة (i) تساوى S_i والكمية المتاحة فى الفترة (j) يجب ألاتقل عن D_j مع ملاحظة أن t_{ij} تمثل ربح الوحدة الواحدة للسلعة المنتجة فى الفترة (i) والمباعة فى الفترة (j) ، وأيضا عندما تتولى إحدى شركات النقل نقل السلعة من مصادر العرض S_i إلى جهات الاستخدام D_j ، حيث $(i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$ ففى هذه الحالة فإن t_{ij} والتى تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلعة المنتجة من المصدر S_i إلى جهة الاستخدام D_j سوف تعتبر من وجهة نظر شركة النقل إيراداً يجب تعظيمه إلى أقصى حد ممكن وليس تكلفة يجب تصغيرها إلى أدنى حد ممكن .

فى مثل هذه الحالات يمكن حل نموذج النقل بإحدى طريقتين هما :

الطريقة الأولــى :

- يتم تحديد أكبر عنصر t_{ij} (أكبر ربح للوحــدة) فــي مصفوفــة النقــل ونرمز لهذا العنصر بـــالرمز $\bar{t}$.

- تستبدل جميع عناصر مصفوفة النقـــل وهـــى t_{ij} (أى أربــاح النقــل) بعناصر جديدة هى t'_{ij} ، حيـــث :

$$t'_{ij} = \bar{t} - t_{ij} \qquad (i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n)$$

- تقيس t'_{ij} التكاليف النسبية ، وبذلك فإن هـــدف إيجــاد الحــد الأقصــى للعائد ، أى $(\text{Max} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij})$ سوف يتحــول إلــى هــدف إيجــاد الحد الأدنى للانحرافـــات t'_{ij} ، أى $(\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t'_{ij} x_{ij})$.

- يتم تحديد الحل المبدئــى لنمــوذج النقــل وصــولاً إلــى الحــل الأمثــل باستخدام أى من طرق الحل الســابقة .

- بعد الوصول إلى الحل الأمثل يمكن تحديد قيمـــة دالــة الــهدف بــإحدى طريقتين همــا :

أ - بالرجوع إلــى اســتخدام قيــم t_{ij} الأصليــة للعــائد مضروبــة فــى الكميــات x_{ij} المتحصــل عليــها مــن الحــل الأمثــل لمصفوفـــة الانحرافات t'_{ij} ، أى أن قيمة دالة الهدف تحســب كمــا يلــى :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

ب – قيمة دالة الهدف = أقصى عائد ممكن تحقيقه – إجمالى قيمة التكاليف النسبية حيث :

أقصى عائد ممكن تحقيقه = أكبر عنصر t_{ij} للعائد فى مصفوفة النقل الأصلية (أى $\bar{t}$) × إجمالى الكميات المعروضة (أو المطلوبة) فى المصفوفة ككل

$$= \bar{t} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\text{إجمالى التكاليف النسبية} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t'_{ij} \; x_{ij}$$

ومن ثم فوفقا لهذه الطريقة يلاحظ أن :

قيمة دالة الهدف تحسب كما يلى :

$$Z = \bar{t} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t'_{ij} \; x_{ij}$$

الطريقة الثانية :

ضرب معاملات دالة الهدف ، Z ، أى ضرب t_{ij} فى (1 -) ثم استكمال باقى خطوات الحل كما بينا فى الأجزاء السابقة .

مثال (١٠) :

شركة للنقل عهد إليها بنقل منتج ما من أربعة مراكز للإنتاج إلى ثلاثة مراكز رئيسية للاستهلاك ، فإذا كانت الطاقات الإنتاجية القصوى

(بالألف طن) لمراكز الإنتاج والاحتياجات القصوى (بالألف طن) لمراكز الاستهلاك وأيضاً مصفوفة العائد المتحقق (بالألف جنيه) للشركة من نقل الوحدة الواحدة من المنتج من كل مركز من مراكز الإنتاج إلى كل مركز من مراكز الاستهلاك موضحة بالشكل التالى :

مركز الاستهلاك / مركز الإنتاج	1	2	3	الطاقة الإنتاجية القصوى
1	16	25	18	70
2	17	20	15	80
3	14	23	17	100
4	18	21	19	50
الاحتياجات القصوى للاستهلاك	100	120	80	

المطلوب :

إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل الذى يحقق أكبر عائد ممكن لشركة النقل .

الحل :

يتم الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج النقل من خلال خطوتين هما :

أ – تحديد الحل المبدئى للنموذج بإحدى طرق الحل السابقة .

ب– اختبار أمثلية الحل المبدئى المتحصل عليه وتحسينه إذا لزم الأمر للوصول إلى الحل الأمثل .

أ – تحديد الحل المبدئي للنموذج :

سوف نستخدم طريقة فوجل التقريبية للحصول على الحل المبدئي للنموذج .

إجمالي الكميات المعروضة من المنتج من مراكز الإنتاج هي :

70 + 80 + 100 + 50 = 300 (ألف طن)

إجمالي الكميات المطلوبة من المنتج في مراكز الاستهلاك هي :

100 + 120 + 80 = 300

يلاحظ أن إجمالي الكميات المعروضة يساوى إجمالي الكميات المطلوبة، لذلك فإن النموذج يعد متوازياً .

وحيث أن معاملات دالة الهدف تعبر عن العائد المتحقق من عملية النقل، لذلك يتم طرح معاملات دالة الهدف من أكبر معامل للعائد بمصفوفة النقل وهو المعامل 25 فنحصل على الانحرافات عن أكبر قيمة للعائد وهى ما أطلقنا عليه التكاليف النسبية ويصبح الهدف بعد ذلك هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف بالنموذج المحول والذى يصبح على النحو التالى :

المصنع \ جهة الاستخدام	1	2	3	إجمالى العرض	d_1	d_2	d_3	d_4
1	[9]	[0] 70	[7]	70	[7]			
2	[8] 80	[5]	[10]	80	3	3	2	2
3	[11]	[2] 50	[8] 50	100	6	[6]	[3]	
4	[7] 20	[4]	[6] 30	50	2	2	1	1
إجمالى الطلب	100	120	80					
d_1 :	1	2	1					
d_2 :	1	2	2					
d_3 :	1		2					
d_4 :	1		[4]					

ب – لاختبار أمثلية الحل المبدئى الذى تم الحصول عليه يتم إجـــراء عمليــة التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية بمصفوفة النقل كما يلى :

الخلية	مسار الحلقة المغلقــة
(1 , 1)	(1 , 1) (1 , 2) (3 , 2) (3 , 3) (4 , 3) (4 , 1)
التكلفة	9 − 0 + 2 − 8 + 6 − 7 = 2
(1 , 3)	(1 , 3) (3 , 3) (3 , 2) (1 , 2)
التكلفة	7 − 8 + 2 − 0 = 1
(2 , 2)	(2 , 2) (3 , 2) (3 , 3) (4 , 3) (4 , 1) (2 , 1)
التكلفة	5 − 2 + 8 − 6 + 7 − 8 = 4
(2 , 3)	(2 , 3) (4 , 3) (4, 1) (2 , 1)
التكلفة	10 − 6 + 7 − 8 = 3
(3 , 1)	(3 , 1) (3 , 3) (4 , 3) (4 , 1)
التكلفة	11 − 8 + 6 − 7 = 2
(4 , 2)	(4 , 2) (4 , 3) (3 , 3) (3 , 2)
التكلفة	4 − 6 + 8 − 2 = 4

حيث أن نتائج التقييم لجميـــع الخلايــا غــير الأساســية بمصفوفــة النقل جميعها قيماً موجبة فيكون الحل المبدئى المتحصـــل عليـــه باســتخدام طريقة فوجل هو الحل الأمثل ، وهو على النحـــو التـــالى :

$$x_{12} = 70 \ , \ x_{21} = 80 \ , \ x_{32} = 50 \ ,$$
$$x_{33} = 50 \ , \ x_{41} = 20 \ , \ x_{43} = 30 \ .$$

يتم الحصول على قيمة دالة الـــهدف وذلــك بضــرب الكميــات x_{ij} المتحصل عليها من الحل الأمثل فى القيـــم الأصليـــة المنـــاظرة لمعـــاملات دالة الهدف قبل إجراء عملية الطرح على النحـــو التـــالى :

$$Z = 25(70) + 17(80) + 23(50) + 17(50) + 18(20) = 6040$$ (ألف جنيه)

كما يمكن إيجاد قيمة دالة الهدف بطريقة أخرى بديلة على النحو التالى :

قيمة دالة الهدف = أقصى عائد يمكن تحقيقه

– قيمة الانحرافات عن أكبر عائد بمصفوفة النقل .

أى أن :

$$Z = 25(300) - [0(70) + 8(80) + 2(50) + 8(50) + 7(20) + 6(30)]$$
$$= 7500 - 1460 = 6040$$ (ألف جنيه)

ثانيا : لكى يكون الحـــل المتحصــل عليــه لنمــوذج النقــل فــى أى جولة من جولات الحل ممكنا يشترط أن يحتـــوى علـــى $(m + n - 1)$ من الخلايا الأساسية ، أما إذا كان عدد الخلايـــا الأساســية فــى أى جولــة

من جولات الحل أصغر من هذا العـــدد ، وهــذا يحــدث عندمــا تتســاوى الكمية المعروضة من أحد المصادر مع الكمية المطلوبة فـــى أحــد جــهات الاستخدام حيث يتم اســتنفاذ الصـــف (الممثــل لجهــة العــرض) والعمــود (الممثل لجهة الاستخدام) فى نفس الوقت . وفى هـــذه الحالـــة يتعــذر تتبــع مسار الحلقة المغلقة عند إجراء عمليـــة التقييـــم للخلايـــا غـــير الأساســـية ، ويقال فى هذه الحالة أن الحل يعانى من حالـــــة الانتكـــاس .

ويتم علاج هذه الحالة وذلك بإضافـــة عـــدد مـــن الخلايـــا الأساســـية الوسيطة (أو الوهميـــة) يســـاوى الفـــرق بيـــن العـــدد $(m + n - 1)$ وعدد الخلايا الأساسية الحاليـــة وشـــغلها بقيـــم X_{ij} مســـاوية لأصفـــار واعتبارها خلايا أساسية ، هذه الخلايـــا الأساســـية الوهميـــة ســـوف تمكـــن من إجراء عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساســـية دون أن يؤثـــر ذلـــك على توازن نموذج النقـــل .

ويتم تحديد الخلايا الأساسية الوهمية علــــى أســـاس اختيـــار الخلايـــا التى لها أقل تكلفة نقل متبقيـــة فـــى الصـــف أو العمـــود وشـــغلها بكميـــات تساوى أصفـــار .

(٣ – ٢) نماذج التخصيص

ينشأ نموذج التخصيص إذا كان هناك n شخص (أو آلة) ومطلوب تنفيذ n عمل (أو مهمة) ، ويقوم كل شخص (أو آلة) بتنفيذ عمل واحد (أو مهمة واحدة) فقط ، كما أن العمل (أو المهمة) ينفذ باستخدام شخص واحد (أو آلة واحدة) فقط (أى أن العلاقة بينهما هى علاقة واحد / بواحد) ، وبفرض أن تكلفة إنجاز الشخص (أو الآلة) i للعمل (أو المهمة) j تساوى t_{ij} ، ويكون الهدف المطلوب هو تخصيص شخص (أو آلة) لكل عمل (أو مهمة) بحيث تكون تكلفة التخصيص الإجمالية أصغر ما يمكن .

فإذا اعتبرنا أن الأشخاص (أو الآلات) تمثل مصادر للعرض ، وأن الأعمال (أو المهمات) الواجب تنفيذها تمثل مصادر للطلب فإن نموذج التخصيص يعد على أنه حالة من نموذج النقل ، إلا أن نموذج التخصيص يتميز بعدة خصائص إضافية هى :

١ – أن عدد الأشخاص (أو الآلات) ، أى جهات العرض ، ينبغى أن يعادل عدد الأعمال (أو المهمات) ، أى جهات الطلب ، أى أن :

$$m = n$$

وبالتالى فإن مصفوفة تكاليف التخصيص تكون مصفوفة مربعة من الترتيب $n \times n$.

٢ – أن كل شخص (أو آلة) يمكن استخدامه (أو استخدامها) مرة واحدة فقط ، ولتنفيذ عمل (أو مهمة) واحدة فقط ، وهذا يعنى أن :

$$S_i = D_j = 1$$

أى أن :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

٣ - أن الشخص الواحد (أو الآلة الواحدة) إما أن يستخدم فى تنفيذ عمل (أو مهمة) معين أو لا يستخدم ، ويعبر عن ذلك كما يلى :

إذا استخدم الشخص (أو الآلة) i فى تنفيذ العمل (أو المهمة) j فإن :

$$x_{ij} = 1$$

أما إذا لم يستخدم الشخص (أو الآلة) i فى تنفيذ العمل (أو المهمة) j فإن :

$$x_{ij} = 0$$

ومعنى ذلك أنه :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا قام الشخص } i \text{ بتنفيذ العمل } j \\ 0 & \text{إذا لم يقم الشخص } i \text{ بتنفيذ العمل } j \end{cases}$$

ويمكن صياغة هذا الشرط كما يلى :

$$x_{ij} = x_{ij}^2 \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ويمكن تصوير عناصر نموذج التخصيص فى الجدول التالى :

الاستخدامات (عمل أو مهمة) / المصادر (أشخاص أو آلات)	1	2	. . .	n	العرض
1	x_{11}	x_{12}	. . .	x_{1n}	1
2	x_{21}	x_{22}	. . .	x_{2n}	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	. . .	x_{nn}	1
الطلب	1	1	. . .	1	

(٣ – ٢ – ١) صياغة نماذج التخصيص

يكون الشكل النمطى لنموذج التخصيص فى الصورة التالية :

المطلوب إيجاد قيم x_{ij} , $(i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$

التى تحقق ما يلى :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \; t_{ij}$$

بشرط أن :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$x_{ij} = 0$ أو 1

وجدير بالذكر إذا تم استبدال الشرط الأخير وأصبح على النحو التالى :

$$x_{ij} \geq 0$$

فينشأ لدينا حينئذ نموذج نقل بحيث أن إجمالى الكميات المعروضة بكل مصدر عرض يساوى إجمالى الكميات المطلوبة بكل جهة استخدام يساوى الواحد الصحيح .

وكما هو واضح فإن نموذج التخصيص يعد حالة خاصة من نموذج النقل مع ملاحظة أن :

$$S_i = D_j = 1 \quad \& \quad m = n$$

وإذا لم يتحقق الشرط $m = n$ نضيف أشخاص وهميين أو أعمال وهمية حتى تتحقق تلك المساواة ويتم استعادة التوازن بين عدد الأشخاص (أو الآلات) وعدد الأعمال (أو المهمات) .

مثال (١) :

بفرض أنه يوجد ثلاثة فنيين هم : T_1, T_2, T_3 يمكن أن يعمل كل منهم على أى من الآلات الثلاثة وهى : M_1, M_2, M_3 . فإذا كانت تكلفة استخدام الفنى T_i لتشغيل الآلة M_j (بالجنيه) فى اليوم موضحاً بالمصفوفة التالية :

الفنى \ الآلــة	M_1	M_2	M_3
T_1	11	14	6
T_2	8	10	11
T_3	9	12	7

المطلوب : هو صياغة المشكلة فى الشكل النمطـــى لنمــوذج التخصيــص.

الحــــــــل :

بفرض أن x_{ij} , $(i = 1, 2, 3 \;; j = 1, 2, 3)$ يشــير إلــى تخصيص الفنى i لإستخدام الآلة j ، فيكون المطلوب هـــو إيجــاد قيــم x_{ij} التى تحقق ما يلـــى :

$$\text{Min } Z = 11 x_{11} + 14 x_{12} + 6 x_{13} + 8 x_{21} + 10 x_{22} + 11 x_{23} + 9 x_{31} + 12 x_{32} + 7 x_{33}$$

بشرط أن :

قيود العرض (بالنسبة للفنيين) :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

قيود الطلب (بالنسبة للآلات) :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

قيد نموذج التخصيص :

$$x_{ij} = 0 \text{ أو } 1$$

أو

$$x_{ij} = x_{ij}^2 \qquad (i=1, 2, 3 ; j=1, 2, 3)$$

مثال (٢) :

بفرض أن إدارة الدفاع المدنى بمحافظة الشرقية تمتلك ثلاثة أنواع من سيارات الإطفاء هى : C_1 , C_2 , C_3 مختلفة فى إمكاناتها وتجهيزاتها ، وتم تقسيم محافظة الشرقية إلى أربعة مناطق جغرافية هى : R_1 , R_2 , R_3 , R_4 حسب طبيعة الأنشطة بكل منطقة، فإذا كان زمن الانتقال (بالدقيقة) لسيارات الإطفاء إلى المناطق الجغرافية كما يلى :

المنطقة / سيارة الإطفاء	R_1	R_2	R_3	R_4
C_1	20	25	15	10
C_2	15	30	20	18
C_3	40	15	45	30

وترغب الإدارة فى تخفيض زمن انتقال سيارة الإطفاء إلى أى من المناطق الأربعة فى حالة نشوب حريق .

المطلوب هو صياغة المشكلة فى الشكل النمطى لنموذج التخصيص .

الحـــــــل :

حيث أن لدينا ثلاثة أنواع من ســيارات الإطفــاء وأربعــة منــاطق جغرافية لذا فإن الأمر يستلزم إضافة مصدر عرض وهو عبارة عن ســيارة إطفاء وهمية يرمز لها بالرمز C_4 حتى يتحقق التوازن بين مصادر العرض وهى السيارات وجهات الطلب وهى المناطق الجغرافية ، على أن تكون أزمنة انتقال السيارة الوهمية إلى المناطق المختلفة تساوى أصفار ، ومن ثم تكــون مصفوفة أزمنة التخصيص كما يلي :

المنطقة / سيارة الإطفاء	R_1	R_2	R_3	R_4
C_1	20	25	15	10
C_2	15	30	20	18
C_3	40	15	45	30
C_4	0	0	0	0

بفرض أن x_{ij} , ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$)

يشــير إلــى تخصيــص ســيارة الإطفــاء i للمنطقــة j ، فيكــون المطلوب هو إيجاد قيم x_{ij} التى تحقق الــهدف التــالى :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = {} & 20\,x_{11} + 25\,x_{12} + 15\,x_{13} + 10\,x_{14} + \\ & 15\,x_{21} + 30\,x_{22} + 20\,x_{23} + 18\,x_{24} + \\ & 40\,x_{31} + 15\,x_{32} + 45\,x_{33} + 30\,x_{34} + \\ & 0\,(x_{41}) + 0\,(x_{42}) + 0\,(x_{43}) + 0\,(x_{44}) \end{aligned}$$

بشرط أن :

قيود العرض (بالنسبة لسيارات الإطفاء) :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

قيود الطلب (بالنسبة للمناطق الجغرافية) :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

قيد التخصيص :

$x_{ij} = 0$ أو 1

أو

$$x_{ij} = x_{ij}^2 \quad , (i = 1, 2, 3, 4 ; \; j = 1, 2, 3, 4)$$

(٣-٢-٢) حل نماذج التخصيص

نظراً للطبيعة الخاصة لنموذج التخصيص فإنه يوجد عدة طرق لحل النموذج تتميز بدرجة عالية من التبسيط ، وذلك بخلاف طريقة السمبلكس أو طرق حل نموذج النقل التي سبق عرضها ، نذكر من هذه الطرق طريقة التعداد والطريقة المجرية .

أ – طريقة التعداد Enumeration Method

تتلخص هذه الطريقة فى حصر جميـــع التخصيصـــات الممكنـــة ثـــم اختيار التخصيص ذا التكلفة الأقـــل .

فعلى سبيل المثـــال ، إذا اعتبرنـــا مصفوفـــة التخصيـــص الـــواردة فى مثال (١) وهى مصفوفة من الترتيب (3 × 3) ، يلاحـــظ مـــا يلـــى :

إذا تم تخصيص الفنـــى T_1 للعمـــل علـــى الآلـــة M_1 ، والفنـــى T_2 للعمل على الآلـــة M_2 ، والفنـــى T_3 للعمـــل علـــى الآلـــة M_3 ، فإن تكلفة التخصيص الكلية تصبح كمـــا يلـــى :

$$11 + 10 + 7 = 28$$ (جنيها)

والجـــدول التـــالى يبيـــن جميـــع التخصيصـــات الممكنـــة وعددهـــا يســـاوى (1 × 2 × 3) = !3 أو 6

الآلــة			تكلفة التخصيص	إجمالى تكلفة التخصيص
M_1	M_2	M_3		
T_1	T_2	T_3	11 + 10 + 7	28
T_1	T_3	T_2	11 + 12 + 11	34
T_2	T_1	T_3	8 + 14 + 7	29
T_2	T_3	T_1	8 + 12 + 6	26
T_3	T_1	T_2	9 + 14 + 11	34
T_3	T_2	T_1	9 + 10 + 6	25

وكما يتضح من جـدول التخصيصـات السـابق فـإن أقـل تكلفـة تخصيص إجمالية تسـاوى 25 ويتحقـق ذلـك عندمـا يتـم تخصيـص الفنى T_1 للعمل على الآلـة M_3 ، وتخصيـص الفنـى T_2 للعمـل على الآلة M_2 ، وتخصيص الفنى T_3 للعمـل علـى الآلـة M_1 .

إلا أن طريقـة حصـر جميـع التخصيصات الممكنة تعتبر طريقـة غيـر عمليـة ومرهقـة حسابياً ، فإذا كانت مصفوفة التخصيص من الترتيب (4 × 4) فسوف ينشأ (1 × 2 × 3 × 4 =) !4 أو 24 تخصيصـاً ممكناً ، بينما إذا كانت مصفوفة التخصيص من الترتيب (8 × 8) فسـوف ينشـأ (1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 =) !8 أو 40320 تخصيصاً ممكناً ، وبالطبع حصر هذه التخصيصات أمر مستحيل .

ب – الطريقة المجرية The Hungarian Method

تعد الطريقة المجرية من أفضل الطرق لحل نموذج التخصيص، وقبل أن نعرض لهذه الطريقة سوف نثبت أولاً صحة النظرية التالية :

إن الحل الأمثل لنموذج التخصيص لا يتغير إذا أضفنا (أو طرحنا) مقداراً ثابتاً إلى (أو من) أى صف أو أى عمود فى مصفوفة تكاليف التخصيص .

إذا كانت u_i , v_j ثوابت تطرح من الصف i والعمود j من مصفوفة تكاليف التخصيص على الترتيب ، فإن عناصر التكاليف بالمصفوفة تصبح كما يلى :

$$t'_{ij} = t_{ij} - u_i - v_j$$

وتصبح بالتالى دالة الهدف الجديدة كما يلى :

$$Z' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \; x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (t_{ij} - u_i - v_j)\, x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

وحيث أنه ضمن قيود نموذج التخصيص

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

فإن :

$$-Z' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} v_j$$

$$= Z - \text{مقدار ثابت}$$

ويعنى ذلك أن تدنية دالة الهدف الأصلية Z يعطى نفس الحل مثـــل تدنية دالة الهدف الجديدة Z' .

وتتلخص الطريقة المجرية لحل نمــوذج التخصيــص مــن الــترتيب (n × n) فى الخطوات الآتيـــة :

خطوة 1 : (a) : لكل صف من صفــوف مصفوفــة تكــاليف التخصيــص نحدد أصغر عنصر تكلفة ونطرحه مــن جميــع عنــاصر ذلك الصــف .

(b) : لكل عمود من أعمـــدة مصفوفــة تكــاليف التخصيــص المتحصل عليــها فــى (a) نحــدد أصغــر عنصــر تكلفة ونطرحه من جميع عناصر ذلــك العمــود .

وفى هذه الحالة فإن مصفوفة تكــاليف التخصيــص المعدلــة ســوف تحتوى حتماً على عنصر صفرى واحد على الأقل فــى كـل صــف وفــى كل عمــود .

خطوة 2 : نغطى جميع الأصفار فى مصفوفـــة التكــاليف المعدلــة بــأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأســية ، مــع ملاحظـــة أن الخط الأفقى يجب أن يمــر خــلال الصــف بكاملــه ، وكذلــك

يجب أن يمر الخط الرأسـي بـالعمود بكامله . وبفـرض أن عـدد الخطـوط الكلية للتغطيـة يسـاوى n_1 ، فـإذا كـان $n_1 = n$ فسوف يتم الحصـول علـى التخصيـص الأمثـل للنموذج، إما إذا كان $n_1 < n$ ننتقل إلـى الخطـوة (3) .

الخطوة (3) : يتم تحديد أصغـر عنصـر تكلفـة فـى مصفوفـة عناصر التكاليف غير المغطاة بخـط ، ونطـرح هـذا العنصـر مـن جميع العناصر غير المغطاة ، ثم نضيـف العنصـر المذكـور إلى العناصر التى تقع عنـد تقـاطع الخطـوط الأفقيـة مـع الخطوط الرأسية ، ثم نعـود للخطـوة 2 لإجـراء عمليـة التغطية لجميع الأصفار فى المصفوفـة الناتجـة بـأقل عـدد ممكن من الخطـوط الأفقيـة والرأسـية ، n_1 ، ويسـتمر تكرار الخطوة (3) إلى أن نصل إلى حالـة $n_1 = n$.

الخطوة (4) : تستخدم مصفوفة تكـاليف التخصيـص المعدلـة المتحصـل عليها فى الخطـوة (3) للوصـول إلـى التخصيـص الأمثـل للنموذج ، حيث نبـدأ بـالبحث عـن الصـف (أو العمـود) الذى يحتوى على عنصر صفـرى وحيـد ونخصـص هـذا العنصر الصفرى ثم نشطب الصف والعمـود الذيـن يحـددان العنصر الصفرى المذكـور . نكـرر ذلـك علـى مصفوفـة التخصيص المختصـرة بعـد الشـطب إلـى أن نصـل إلـى التخصيص الأمثـل .

مثـــال (٣) :

شركة بترول لديها أربع سفن عملاقة للتنقيب عن البترول هى :
S_1, S_2, S_3, S_4 ، وتود الشـــركة فـــى تخصيصـــها لأربعـــة منـــاطق بحرية هى : A , B , C , D . فـــإذا كـــانت تكلفـــة نقـــل الســـفن إلـــى مناطق التنقيب (بالألف جنيه) موضحـــة بالمصفوفـــة التاليـــة :

السفينة \ الموقع	A	B	C	D
S_1	11	14	16	13
S_2	19	17	20	19
S_3	14	15	21	17
S_4	18	17	18	15

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل للسفن لمناطق التنقيب .

الحـــــــل :

للوصول على التخصيص الأمثل للسفن لمنـــاطق التنقيـــب يتـــم ذلـــك من خلال الخطوات التاليـــة :

خطوة 1 : (a) : نحدد أصغر عنصر تكلفة بكل صف من صفوف مصفوفـــة تكاليف التخصيص ، أى $(i = 1, 2, 3, 4)$, u_i ، كمـــا يتضح بالمصفوفة (1) .

مصفوفة (1)

الموقع / السفينة	A	B	C	D	u_i
S_1	11	14	16	13	11
S_2	19	17	20	19	17
S_3	14	15	21	17	14
S_4	18	17	18	15	15

نطرح القيمة u_i من جميع عناصر الصـــف i ، حيــث $i = 1, 2, 3, 4$ فنحصل علـــى المصفوفــة (2) .

(b) : نحدد أصغر عنصر تكلفة بكل عمود من أعمدة مصفوفـــة تكاليف التخصيص (2) ، أى v_j ,($j = 1, 2, 3, 4$) كما يتضح بالمصفوفة (2) .

مصفوفة (2)

الموقع / السفينة	A	B	C	D
S_1	0	3	5	2
S_2	2	0	3	2
S_3	0	1	7	3
S_4	3	2	3	0
v_j	0	0	0	0

نطــرح القيمــة v_j مــن عناصــر العمــود j ، حيث $j = 1, 2, 3, 4$ فنحصل على المصفوفة (3) .

مصفوفة (3)

الموقع / السفينة	A	B	C	D
S_1	0	3	2	2
S_2	2	0	0	2
S_3	0	1	4	3
S_4	3	2	0	0

الخطوة (2) : نغطى جميع الأصفار فــى مصفوفــة تكــاليف التخصيــص (3) بأقل عدد ممكن من خطوط التغطيــة الأفقيــة والرأســية كما هو مبين . وحيــث أن عــدد خطــوط التغطيــة يســاوى $n_1 = 3$ ، وهو أصغــر مــن $(n = 4)$ وبالتــالى لــم نصل بعد إلى التخصيص الأمثــل .

الخطوة (3) : نحدد أصغر عنصر غير مغطى بالمصفوفــة (3) وهــو الواحــد الصحيــح ، وبطرحــه مــن جميــع عنــاصر تلــك المصفوفة غير المغطــاة ، وإضافتــه إلــى عنــاصر تقــاطع

خطوط التغطية الأفقية والرأسية نحصل على مصفوفة التخصيص (4) .

مصفوفة (4)

الموقع / السفينة	A	B	C	D
S_1	0	2	1	1
S_2	3	0	0	2
S_3	0	0	3	2
S_4	4	2	0	0

نغطي جميع الأصفار في مصفوفة تكاليف التخصيص (4) بأقل عدد ممكن من خطوط التغطية الأفقية والرأسية كما هو مبين .

وحيث أن عدد خطوط التغطية يساوى $n_1 = 4$ ، وهو يساوى $(n = 4)$ ، نكون قد وصلنا إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (4) : من مصفوفة التخصيص (4) نحصل على التخصيص الأمثل وذلك باختيار أربعة عناصر صفرية مستقلة على النحو التالي :

حيث أن الصف الأول من المصفوفة يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (S_1 , A) لذلك نضع $x_{11} = 1$ ، أى نخصص السفينة S_1 للموقع A ونحذف الصف الأول والعمود الأول .

وحيث أن العمود الرابع يحتوى أيضا على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (S_4 , D) لذلك نضع $x_{44} = 1$ ، أى نخصص السفينة S_4 للموقع D ويتم حذف الصف الرابع والعمود الرابع من المصفوفة .

وحيث أن الصف الثالث من المصفوفة المختصرة ، بعد الحذف ، أصبح يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (S_3 , B) لذلك نضع $x_{32} = 1$ ، بمعنى تخصيص السفينة S_3 للموقع B ويتم حذف الصف الثالث والعمود الثانى ، وأخيراً نضع $x_{23} = 1$ ، بمعنى تخصيص السفينة S_2 للموقع C .

وتكون سياسة التخصيص المثلى على النحو التالى :

السفينة S_1 يجب تخصيصها للموقع A

السفينة S_2 يجب تخصيصها للموقع C

السفينة S_3 يجب تخصيصها للموقع B

السفينة S_4 يجب تخصيصها للموقع D

وتكون تكلفة التخصيص المثلى هى :

$11 + 20 + 15 + 15 = 51$ (ألف جنيه)

ملاحظات هامة حول نموذج التخصيص

أولاً : إذا كانت مصفوفة التخصيص غير مربعة من الترتيب $m \times n$ حيث $m \neq n$

قد يحدث فى بعض الأحيان أن يكون نموذج التخصيص غير مربع ، ويحدث ذلك عندما يكون عدد مصادر العرض (m) أكبر من عدد جهات الاستخدام (n) أو العكس . ولإستخدام الطريقة المجرية لحل النموذج يلزم أن يكون النموذج مربعاً بمعنى $m = n$ ويتم ذلك كما يلى :

إذا كان عدد مصادر العرض (m) أكبر من عدد جهات الاستخدام (n) فنفترض وجود جهات استخدام وهمية تعادل الفرق ($m - n$) بعناصر تكلفة صفرية ، وإذا كان عدد جهات الاستخدام (n) أكبر من عدد مصادر العرض (m) فنفترض وجود مصادر عرض وهمية تعادل الفرق ($n - m$) بعناصر تكلفة صفرية ، وذلك لاستعادة الصورة المربعة لنموذج التخصيص .

مثال (٤) :

شركة مقاولات لديها حفار فائض عن حاجة العمل فى كل مدينة من المدن التالية : D, C, B, A ويوجد حفار عجز فى مواقع الشركة بالمدن الخمس التالية : 5, 4, 3, 2, 1 ، وترغب الشركة فى تغطية هذا العجز بنقل الحفارات من المدن التى بها فائض إلى تلك التى بها عجز .

فإذا كـــانت المســـافة بيـــن المـــدن المختلفـــة بـــالكيلومتر موضحـــة بالمصفوفة التاليـــة :

مدن العجز / مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	12	10	15	22	18
B	10	18	25	15	16
C	11	10	3	8	5
D	6	14	10	13	13

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل للحفارات من مدن الفـــائض إلـــى مـــدن العجز بحيث تكون مسافات الانتقال أصغر مـــا يمكـــن .

الحـــــل :

يوجد أربع مدن بكل منـــها حفـــار فـــائض تمثـــل مصـــادر للعـــرض وخمس مدن بكل منها حفار عجز تمثـــل جـــهات للإســـتخدام ، وحيـــث أن مصفوفة التخصيص ينبغي أن تكون مربعة فيلـــزم إضافـــة مدينـــة وهميـــة إلى المدن التي بها حفـــار فـــائض ولتكـــن المدينـــة E علـــى أن تكـــون المسافات بينها وبين المدن التي بـــها حفـــار عجـــز عبـــارة عـــن عنـــاصر صفرية، وتكون مصفوفة مسافات التخصيص مربعـــة كمـــا يلـــى :

مدن العجز / مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	12	10	15	22	18
B	10	18	25	15	16
C	11	10	3	8	5
D	6	14	10	13	13
E (وهمية)	0	0	0	0	0

لإيجاد التخصيص الأمثل للحفارات نتبع الخطـــوات التاليـــة :

الخطوة (1) : (a) : نحدد أصغر عنصر مســـافة ، u_i ، بكــل صــف مـــن مصفوفــة التخصيــص كمـــا يتضــح فـــى المصفوفــة (1) .

المصفوفة (1)

مدن العجز / مدن الفائض	1	2	3	4	5	u_i
A	12	10	15	22	18	10
B	10	18	25	15	16	10
C	11	10	3	8	5	3
D	6	14	10	13	13	6
E (وهمية)	0	0	0	0	0	0

نطرح القيمة u_i من جميع عناصر الصف i ، حيث $i = 1, 2, 3, 4, 5$ فنحصل على المصفوفة (2) .

(b) : نحدد أصغر عنصر مسافة ، v_j بكل عمود من أعمدة مصفوفة التخصيص (2) ، حيث $j = 1, 2, 3, 4, 5$ كما يلى :

المصفوفة (2)

مدن العجز / مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	2	0	5	12	8
B	0	8	15	5	6
C	8	7	0	5	2
D	0	8	4	7	7
E	0	0	0	0	0
v_j	0	0	0	0	0

نطرح القيمة v_j من جميع عناصر العمود j ، حيث $j = 1, 2, 3, 4, 5$ فنحصل على المصفوفة (3) ، حيث ستكون عناصرها هي نفس عناصر المصفوفة (2) لأنه تم طرح صفر من عناصر كل عمود .

المصفوفة (3)

مدن الفائض \ مدن العجز	1	2	3	4	5
A	2	0	5	12	8
B	0	8	15	5	6
C	8	7	0	5	2
D	0	8	4	7	7
E	0	0	0	0	0

الخطوة (2) : نغطي جميع الأصفار في مصفوفة مسافات التخصيص (3) بأقل عدد ممكن من خطوط التغطية الأفقية والرأسية كما هو مبين . وحيث أن عدد خطوط التغطية يساوى $n_1 = 4$ ، وهو أصغر من ($n = 5$) فلم نصل بعد إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (3) : نحدد أصغر عنصر غير مغطى بالمصفوفة (3) وهو 4 ، ونطرحه من جميع عناصر المصفوفة غير المغطاة ، ونضيفه إلى عناصر تقاطع خطوط التغطية الأفقية والرأسية ونحصل على مصفوفة التخصيص (4) .

المصفوفة (4)

مدن العجز / مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	2	0	1	8	4
B	0	8	11	1	2
C	12	11	0	5	2
D	0	8	0	3	3
E	4	4	0	0	0

نغطى جميع الأصفار فى المصفوفة (4) بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية كما هو موضح ، وحيث أن عدد خطوط التغطية يساوى $n_1 = 4$ ، وهو مازال أصغر من ($n = 5$) فلم نصل بعد إلى التخصيص الأمثل .

نحدد أصغر عنصر غير مغطى بالمصفوفة (4) وهو الواحد الصحيح ، ونطرحه من جميع عناصر المصفوفة غير المغطاة ، ونضيفه إلى عناصر تقاطع خطوط التغطية الأفقية والرأسية فنحصل على مصفوفة التخصيص (5) .

المصفوفة (5)

مدن العجز / مدن الفائض	1	2	3	4	5
A	3	0	2	8	4
B	0	7	11	0	1
C	12	10	0	4	1
D	0	7	0	2	2
E	5	4	1	0	0

بتغطية جميع الأصفار في مصفوفة مسافات التخصيص يلاحظ أن أقل عدد من خطوط التغطية الأفقية والرأسية يساوى $5 = n = n_1$ وبذلك نصل إلى التخصيص الأمثل .

الخطوة (4) : من مصفوفة التخصيص (5) يتم الحصول على التخصيص الأمثل باختيار خمسة عناصر صفرية مستقلة على النحو التالى :

حيث أن الصف الأول يحتوى على عنصر صفرى وحيد في الخلية (A , 2) فنضع $x_{12} = 1$ ، أى نخصص حفار المدينة A للعمل بالمدينة 2 ، ونحذف جميع عناصر الصف الأول والعمود الثانى .

وحيث أن العمود الرابع يحتوى على عنصر صفرى وحيد في الخلية (E , 5) لذلك نضع $x_{55} = 1$ بمعنى تخصيص حفار المدينة E

(الوهمية) للعمل بالمدينة 5 ثم نحذف جميع عناصر الصف الخامس والعمود الخامس .

يلاحظ بعد ذلك أن العمود الثالث يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (B , 4) فنضع $x_{24} = 1$ ، ويعنى ذلك تخصيص حفار المدينة B للعمل بالمدينة 4 ثم نحذف الصف الثانى والعمود الرابع .

ويلاحظ أيضا بعد هذا الحذف أن العمود الأول يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (D , 1) فنضع $x_{41} = 1$ ويعنى ذلك تخصيص حفار المدينة D للعمل بالمدينة 1 ، ونحذف الصف الرابع والعمود الأول ... وأخيراً نضع $x_{33} = 1$ بمعنى تخصيص حفار المدينة C للعمل بالمدينة 3 ، وتكون سياسة التخصيص المثلى على النحو التالى :

يخصص حفار المدينة A للعمل بالمدينة 2

يخصص حفار المدينة B للعمل بالمدينة 4

يخصص حفار المدينة C للعمل بالمدينة 3

يخصص حفار المدينة D للعمل بالمدينة 1

يخصص حفار المدينة E (الوهمية) للعمل بالمدينة 5 ويعنى ذلك عدم تخصيص أى حفار للعمل بتلك المدينة .

وتكون أصغر مسافة إجمالية للتخصيص (بالكيلومتر) هى :

$$10 + 15 + 3 + 6 + 0 = 34 .$$

ثانيا : إذا كانت دالة الهدف فى نموذج التخصيص فى اتجاه الحد الأقصى

قـد يحـدث أن تكـون عنـاصر مصفوفـة التخصيـص ، t_{ij} ، تعبر عن الربـح أو العائـد أو المنفعـة نتيجـة تخصيـص العـامل (أو الآلة) i لإنجاز العمل (أو المهمـة) j ويكـون المطلـوب فـى هـذه الحالة هو إيجاد x_{ij} , $(i , j = 1, 2, \dots , n)$ التـى تحقـق الحـد الأقصى للدالـة :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \; x_{ij}$$

ولكى يتم حـل نمـوذج التخصيـص فـى هـذه الحالـة باسـتخدام الطريقة المجرية تتبع نفس الطريقة المتبعة فـى حـل نمـوذج النقـل فـى حالة تعظيم دالة الهدف كما يلـى :

- يتم تحديـد أكـبر عنصـر للربـح أو للعـائد ، t_{ij} ، فـى مصفوفـة التخصيص ونرمز لهذا العنصر بالرمز $\bar{t}$.

تستبدل جميع عناصر مصفوفة التخصيـص بعنـاصر جديـدة هـى t'_{ij} ، حيـث :

$$t'_{ij} = \bar{t} - t_{ij} \qquad (i , j = 1, 2, 3, \dots , n)$$

- تقيس t'_{ij} التكاليف النسبية ، وبذلك فإن هدف إيجاد الحد الأقصى للربـح (أو العائد) أو $\left(Max = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \; x_{ij} \right)$ سوف يتحول إلى هـدف إيجاد الحد الأدنى للانحرافات t'_{ij} أو $\left(Min = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t'_{ij} \; x_{ij} \right)$.

- يتم استخدام الطريقة المجرية السابق عرضها فى إيجاد التخصيص الأمثل للانحرافات t'_{ij}

- يتم استخدام عناصر الربح t_{ij} الأصلية عند تحديد قيمة التخصيص الأمثل للنموذج .

مثال (٥) :

شركة صناعية لديها أربعة مديرين للتسويق هم : D, C, B, A ولديها أربعة فروع للبيع فى أربعة مدن يرمز لهذه الفروع بالرموز D_4, D_3, D_2, D_1 ، وبعد دراسة كفاءة كل مدير تسويق من المديرين وطبيعة احتياجات كل مدينة من المدن الأربعة وجد أن العائد اليومى (بالألف جنيه) لكل مدير تسويق فى كل فرع من فروع البيع موضحا بالمصفوفة التالية :

الفرع / المدير	D_1	D_2	D_3	D_4
A	16	10	14	11
B	14	11	15	13
C	15	15	13	12
D	14	11	12	13

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل لمديرى التسويق لفروع البيع المختلفة الذى يحقق أكبر عائد ممكن للشركة .

الحــــــل :

حيث أن عناصر مصفوفة التخصيص تعـــبر عــن العـائد المتحقــق من عملية التخصيص ، لذلك يتــم طــرح عنــاصر مصفوفــة التخصيــص من أكبر عنصـــر للعــائد بالمصفوفــة وهــو القيمــة 16 فنحصــل علــى مصفوفة الانحرافات عن أكـــبر قيمــة للعــائد وهــى مــا أطلقنــا عليــها التكاليف النسبية ، ويصبـــح الــهدف حينئــذ اســتخدام الطريقــة المجريــة لإيجاد الحد الأدنى لمصفوفة التخصيــص التاليــة :

الفرع / المدير	D_1	D_2	D_3	D_4
A	0	6	2	5
B	2	5	1	3
C	1	1	3	4
D	2	5	4	3

الخطوة 1 : (a) : نحدد أصغر عنصـــر تكلــفة ، u_i ، بكــل صــف مــن مصفوفة التخصيص كما يتضح فـــى المصفوفــة (1) .

مصفوفة (1)

المدير \ الفروع	D_1	D_2	D_3	D_4	u_i
A	0	6	2	5	0
B	2	5	1	3	1
C	1	1	3	4	1
D	2	5	4	3	2

نطرح القيمة u_i من جميع عناصر الصف i ، حيث $i = 1, 2, 3, 4$ فنحصل على مصفوفة التخصيص (2) ، ونحدد بها أصغر عنصر تكلفة بكل عمود $(j = 1, 2, 3, 4)$, v_j كما يلي :

مصفوفة (2)

المدير \ الفروع	D_1	D_2	D_3	D_4
A	0	6	2	5
B	1	4	0	2
C	0	0	2	3
D	0	3	2	1
v_j	0	0	0	1

بطرح القيمة v_j من جميع عناصر العمود j ، حيث $j = 1, 2, 3, 4$

فنحصل على مصفوفة التخصيص (3) التالية :

مصفوفة (3)

الفرع / المدير	D_1	D_2	D_3	D_4
A	[0]	6	2	4
B	1	4	[0]	1
C	0	[0]	2	2
D	0	3	2	[0]

الخطوة (2) : نغطى جميع الأصفار فـــى مصفوفـــة تكـــاليف التخصيـــص السابقة بـــأقل عـــدد ممكـــن مـــن خطـــوط التغطيـــة الأفقيـــة والرأسية كما هو مبين ، وحيـــث أن عـــدد خطـــوط التغطيـــة هـــو : $n_1 = n = 4$ ، نكـــون بذلـــك قـــد وصلنـــا إلـــى التخصيص الأمثل والذى يتحدد من خلال الخطـــوة التاليـــة .

الخطوة (3) : الصف الأول من المصفوفة يحتوى علـــى عنصـــر صفـــرى وحيد فى الخلية (A , D_1) لذلـــك نضـــع $x_{11} = 1$ ، أى نخصص مديـــر التســـويق A للعمـــل بـــالفرع D_1 ، ثـــم نشطب باقى عناصر الصـــف الأول والعمـــود الأول .

كما أن الصف الثانى من المصفوفة يحتوى على عنصر صفرى وحيد فى الخلية (B , D_3) فنضع $x_{23} = 1$ ، ويعنى وذلك تخصيص مدير التسويق B للعمل بالفرع D_3 ، ويتم شطب الصف الثانى والعمود الثالث .

بعد هذا الشطب يلاحظ أن الصف الثالث من المصفوفة أصبح يحتوى على عنصر صفرى واحد فى الخلية (C , D_2) ، فنضع $x_{32} = 1$ ، ويعنى ذلك تخصيص مدير التسويق C للعمل بالفرع D_2 ، ثم يشطب الصف الثالث والعمود الثانى ، وأخيراً نضع $x_{44} = 1$ ، بمعنى تخصيص مدير التسويق D للعمل بالفرع D_4 .

وتكون سياسة التخصيص المثلى كما يلى :

يخصص مدير التسويق A للفرع D_1

يخصص مدير التسويق B للفرع D_3

يخصص مدير التسويق C للفرع D_2

يخصص مدير التسويق D للفرع D_4

وأقصى ربح يتحقق (بالألف جنيه) فى اليوم للشركة هو :

$$16 + 15 + 15 + 13 = 59$$

ثالثاً : وجود بعض القيود المفروضة على نموذج التخصيص

قد يحدث فى بعض الأحيان – نظراً لاعتبارات فنية أو سياسية أو قانونية معينة – أنه لا يمكن تخصيص شخص (أو آلة) معين i لأداء وظيفة (أو مهمة) معينة j .

ويمكن التغلب على هذه المشكلة بأن نضع تكلفة تخصيص لانهائية فى الخلية الواقعة عند تلاقى الصف i مع العمود j ، أى نضع $t_{ij} = \infty$ ، وبذلك نضمن ألا يتم تخصيص الشخص (أو الآلة) i فى الوظيفة (أو المهمة) j على الإطلاق فى التخصيص الأمثل للنموذج.

مثال (٦) :

مؤسسة دار الهلال للطبع والنشر استوردت أربع آلات طباعة هى : M_1 , M_2 , M_3 , M_4 ، تود تركيبها فى خمسة عنابر يرمز لها بالرموز A, B, C, D, E . ونظراً لاعتبار أحجام العنابر ، وجد أنه لا يمكن تركيب الآلة M_2 فى العنبر C ، كما لا يمكن تركيب الآلة M_3 فى العنبر A . فإذا كانت تكلفة تركيب كل آلة فى كل عنبر (بالألف جنيه) موضحة بالمصفوفة التالية :

الآلة \ العنبر	A	B	C	D	E
M_1	4	6	10	5	6
M_2	7	4	-	5	4
M_3	-	6	9	6	2
M_4	9	3	7	2	3

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل لآلات الطباعة على العنابر .

الحـــــل :

يلاحظ أن مصفوفة تكاليف التخصيص غـير مربعـة ، حيـث يوجـد أربع آلات طباعة (أى مصادر) وخمسة عنـابر (أى جـهات اسـتخدام)، لذلك تضاف آلة طباعة وهمية ويرمز لـها بـالرمز M_5 بعنـاصر تكلفـة صفرية وبما أنه لا يمكن تركيـب الآلـة M_2 فـى العنـبر C ، والآلـة M_3 فـى العنبـر A فنضـع تكلفـة تركيـب لانهائيـة فـى الخليتين (M_2, C) ، (M_3, A) ، أى نضـع

$t_{23} = \infty$

$t_{31} = \infty$

وتكون مصفوفة تكاليف التخصيص كمـا يلـى :

العنبر / الآلـة	A	B	C	D	E
M_1	4	6	10	5	6
M_2	7	4	∞	5	4
M_3	∞	6	9	6	2
M_4	9	3	7	2	3
M_5 (وهمية)	0	0	0	0	0

بتطبيق خطوات الحـل وفقاً للطريقـة المجريـة - كما سـبق عرضها فى الأمثلـة السـابقة - نجـد أن مصفوفـة التخصـيص الأمثـل سوف تأخذ الصورة التاليـة :

العنبر / الآلة	A	B	C	D	E
M_1	[0]	6	6	1	2
M_2	3	[0]	∞	1	0
M_3	∞	4	7	4	[0]
M_4	7	1	5	[0]	1
M_5 (وهمية)	0	0	[0]	0	0

ويكون التخصيص الأمثل للنموذج على النحـو التـالى :

تخصيص الآلة M_1 للعنـبر A

تخصيص الآلة M_2 للعنـبر B

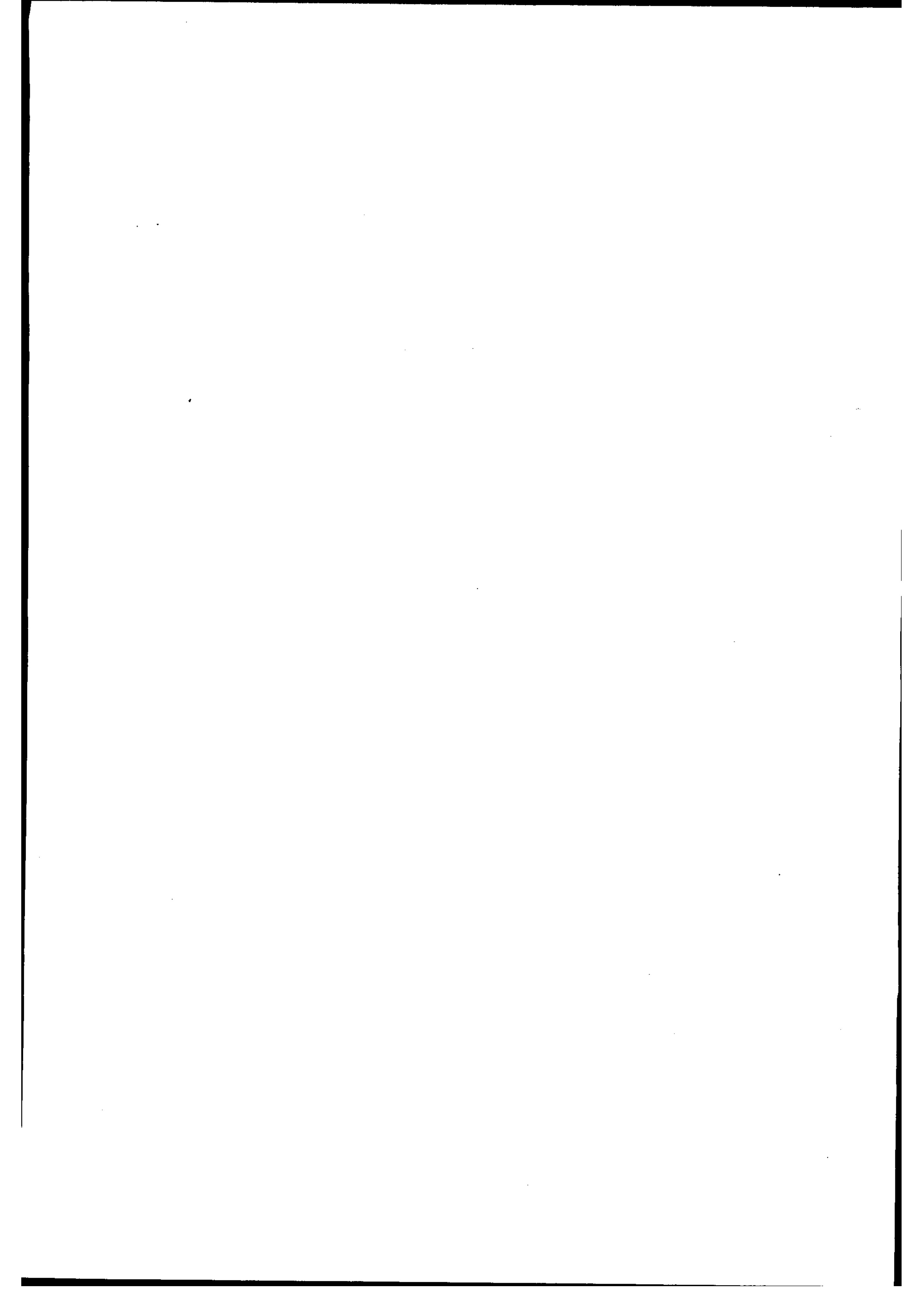
تخصيص الآلة M_3 للعنـبر E

تخصيص الآلة M_4 للعنـبر D

تخصيص الآلة M_5 للعنبر C ويعنى ذلك أن العنبر C سيظل شاغراً

وتكون تكلفة التخصيص الإجمالية فى النموذج (بالألف جنيه) هى :

$$4 + 4 + 2 + 2 + 0 = 12$$



الباب الرابع

نظرية المباريات

◎ مقدمة

◎ المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع

- الإستراتيجيات البسيطة المثلى ونقطة التوازن
- طريقة السيطرة والتسيد
- الإستراتيجيات المختلطة

الباب الرابع
نظرية المباريات
Theory of Games

(٤-١) مقدمة

تاريخيا نشأت نظرية المباريات في العشرينات من القرن المنصرم ، إلا أن تطبيق نظرية المباريات على نطاق واسع بدأ منذ عام ١٩٤٤ عندما نشر كل من فون نيومان ومورجنستيرن مؤلفهما الشهير عن نظرية المباريات والسلوك الاقتصادي " Theory of Games and Economic Behaviour " .

وتهتم نظرية المباريات بدراسة المواقف أو الأعمال التي تتضمن المنافسة والصراع وتضارب المصالح ، حيث نجد في مثل هذه الحالات أن مصالح الخصوم تكون غير متطابقة بل وتصل أحيانا إلى درجة التناقض والصراع ، أضف إلى ذلك ، أن كل طرف في المباراة يمكن أن يؤثر على مجرى الأحداث في هذه المباراة ، ولكنه لا يستطيع أن يكون سيد الموقف بصورة مستمرة وكاملة .

وبالرغم من أن لفظ " المباراة " ينسحب على المباريات الرياضية المختلفة والعاب الشطرنج والكوتشينة والدومينو وغيرها . إلا أن هناك تشابه كبير بين سلوك أطراف مثل هذه المباريات وبين سلوك المتنافسين في سوق معين أو سلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين . هذا الشبه أدى إلى تعميم لفظ المباراة بحيث يشمل المواقف الاقتصادية والعسكرية والسياسية وغيرها التي تتضمن تنافس أو تعارض المصالح .

وقد بدأ استخدام نظرية المباريات في التعامل مع التطبيقات الاقتصادية ثم تم تطويعها لتطبيقات عسكرية أثناء الحرب العالمية الثانية ، ثم شاع استخدام نظرية المباريات ، مؤخراً ، في مجالات العلوم الاجتماعية والسياسية . ونظرية المباريات هي مجمل الطرق الرياضية التي تناقش وتحلل هذه المواقف .

وتستخدم نظرية المباريات بعض المصطلحات الفنية سوف نعرضها بإيجاز فيما يلي :

١ - اللاعب : يدل على وحدة اتخاذ القرار ، وقد تكون هذه الوحدة فرد أو شركة أو دولة ... الخ .

٢ - اللعبة والمباراة : اللعبة هي مجموعة قواعد تحدد ما يجب أو ما يستطيع أن يفعله اللاعب فهي تتكون من سلسلة من الخطوات . أما المباراة فهي تطبيق خاص لقواعد اللعبة يؤدي إلى نتيجة معينة، وهي بذلك تتكون من سلسلة من الاختيارات .

٣ - الإستراتيجية : هي جملة القواعد التي تحدد اختيار اللاعب في كل خطوة في اللعبة ، وكل إستراتيجية من الإستراتيجيات المحددة التي يمكن أن يختارها اللاعب تسمى بالإستراتيجية الصرفة أو البسيطة Pure Strategy . أما إذا اختار اللاعب كل أو بعض من مجموعة الإستراتيجيات البسيطة المتاحة أمامه كل منها يتم اختيارها باحتمال معين، فيقال في هذه الحالة أنه يستخدم ما يسمى بالإستراتيجيات المختلطة Mixed Strategy .

والمواقف المتنافسة تسمى بالمباريات إذا اتصفت بالخصائص التالية :

١ - يوجد عدد محدد من الأطراف (اللاعبين) ، t ، حيث : $2 \geq t$. فإذا كانت $t = 2$ فتكون المباراة ثنائية الأطراف . أما إذا كانت $t > 2$ تسمى المباراة متعددة الأطراف .

٢ ـ كل طرف من أطراف الصراع يملك عدداً محدداً من الإستراتيجيات المتاحة أمامه ·

٣ ـ كل طرف من الطرفين يعرف تماماً الإستراتيجيات أو البدائل المتاحة للطرف الآخر ولكنه لا يعرف أي من هذه الإستراتيجيات أو البدائل سوف يختار ·

٤ ـ اهتمامات كل من الطرفين متعاكسة أو متضادة في طبيعتها ·

٥ ـ اختيارات كل من الطرفين يفترض أنها تتم في وقت واحد ، وبالتالي فإن أي من الطرفين لا يعرف ما سيختاره الطرف الآخر حتى يقرر ما سيختاره هو ·

٦ ـ محصلة الإستراتيجيات التي يتم اختيارها سوف يعطي عائد المباراة والذي يمكن أن يكون موجبا أو صفراً أو سالباً · ويلاحظ أنه إذا كان العائد سالب القيمة فيعني ذلك خسارة للاعب ، وبالتالي فبعد لعب كل مباراة فإن اللاعب الخاسر سوف يدفع للاعب الكاسب قيمة أو عائد المباراة ·

(٤-٢) المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع

Two-Person, Zero-sum Game

عندما تتألف المباراة من طرفين أو خصمين فقط (فردين أو مؤسستين أو دولتين · · · الخ) فإنها تسمى مباراة ثنائية الأطراف · وإذا كان ربح الطرف الأول في المباراة يساوي تماماً خسارة الطرف الثاني ، ومن ثم فإن صافي الأرباح (أو الخسائر) يساوي الصفر ، فيقال عن المباراة بأنها ذات مجموع صفري ·

أما في حالة وجود t من الأطراف أو الخصوم وكان صافي الأرباح (أو الخسائر) يساوي صفراً ، فيقال عن المباراة بأنها متعددة الأطراف صفرية المجموع t-Person, Zero-sum Game . وسوف يكون الاهتمام في هذا الجزء منصباً على المباريات ثنائية الأطراف صفرية المجموع .

(٤-٢-١) الإستراتيجيات البسيطة المثلى ونقطة التوازن

Optimum Simple Strategies and Saddle Point

نفرض أن هناك مباراة تتضمن طرفين وذات مجموع صفري ، وبفرض أن الطرف الأول لديه m إستراتيجية والطرف الثاني لديه n إستراتيجية ، ولنفرض أيضاً أنه إذا اختار الطرف الأول الإستراتيجية i ، $(i = 1,2,...,m)$ واختار الطرف الثاني الإستراتيجية j ، $(j = 1, 2, ... , n)$ فإن ربح الطرف الأول (وبالتالي خسارة الطرف الثاني) يساوي a_{ij} ، وتكون مصفوفة العائد لهذه المباراة والتي يرمز لها بالرمز $[a]$ على الصورة التالية :

$[a] =$

الطرف الثاني / الطرف الأول	1	2	3	......	n
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	......	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	......	a_{2n}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	......	a_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	......	a_{mn}

فإذا فرضنا أنه من الأفضل أن يختار اللاعب الأول الإستراتيجية i' ويختار اللاعب الثاني الإستراتيجية j' ، ففي هذه الحالة فإن عائد اللاعب الأول يساوي $(a_{i'j'})$ بينما عائد اللاعب الثاني يساوي $(-a_{i'j'})$. وإذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية i' وابتعد اللاعب الثاني عن الإستراتيجية j' فإن ربح اللاعب الأول سيكون حتماً أكبر من القيمة $a_{i'j'}$ ، لذلك فإن اللاعب الثاني سيصر على اختيار الإستراتيجية j' لمنع اللاعب الأول من تحقيق عائد أكبر من $a_{i'j'}$ ، ومن ثم فإن :

$$a_{ij'} \leq a_{i'j'} \leq a_{i'j} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \qquad (4\text{-}1)$$

وتعني المتباينة السابقة أن اختيار اللاعب الأول للإستراتيجية i' سوف يضمن له عائد يساوي على الأقل القيمة $a_{i'j'}$ ، وأن اختيار اللاعب الثاني للإستراتيجية j' سوف يضمن له أن اللاعب الأول لن يحصل على عائد أكبر من القيمة $a_{i'j'}$. وفي هذه الحالة فإن الإستراتيجيتين المثلتين هما : i' , j' ، والنقطة التي تتقاطعان فيها هي النقطة (i', j') تسمى بنقطة التوازن أو نقطة الإستقرار أو نقطة الركاب Saddle Point لمصفوفة العائد [a] . وتسمى القيمة $V = a_{i'j'}$ بالقيمة المثلى للمباراة .

وفي كثير من الحالات فإن مصفوفة العائد تتضمن عدة نقاط للتوازن تحدد جميعها دائماً قيمة وحيدة للمباراة . ويلاحظ هنا أنه إذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية i' فإنه يضمن الحصول على الأقل على القيمة V بصرف النظر عن اختيار اللاعب الثاني ، وإذا اختار اللاعب الثاني الإستراتيجية j' فإنه يضمن بذلك أن اللاعب الأول سوف لا يحصل على أكثر من القيمة V . وكذلك إذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية i' فإن اللاعب

الثاني لا يستطيع أن يستفيد من ذلك ويخفض عائد اللاعب الأول ، وإذا اختار اللاعب الثاني الإستراتيجية j' فإن اللاعب الأول لا يستطيع أن يستفيد من ذلك ويزيد عائده .

وبصفة عامة يمكن القول ، إذا اختار اللاعب الأول الإستراتيجية i فإنه يضمن حصوله على الأقل على القيمة :

$$\min_{j} a_{ij}$$

وحيث أنه حر في اختيار الإستراتيجية i فإنه يختار الإستراتيجية التي تضمن له أن يحصل على الأقل على القيمة :

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij}$$

بالمثل ، فإن اللاعب الثاني باختياره الإستراتيجية j يتوقع أن يحصل على القيمة :

$$\max_{j} \min_{i} (-a_{ij})$$

وحيث أن :

$$\max_{j} \min_{i} (-a_{ij}) = \max_{j} - (\max_{i} a_{ij}) = - \min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

فإن اللاعب الثاني يضمن أن يحصل على الأقل على القيمة :

$$- \min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

أي أن اللاعب الأول سوف يحصل في هذه الحالة على الأكثر على القيمة :

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

وذكرنا آنفاً أن اللاعب الأول يضمن أن يحصل على الأقل على القيمة :

$$\max_i \; \min_j a_{ij}$$

ويلاحظ في هذه الحالة أن اللاعب الأول اعتمد على معيار أكبر القيم الصغرى Maximin Criterion في اختيار الإستراتيجية البسيطة ، أو بمعنى آخر يقال أنه اختار إستراتيجية أكبر القيم الصغرى Maximin Strategy ·

أما اللاعب الثاني فإنه يستطيع أن يمنع اللاعب الأول من الحصول على أكثر من القيمة :

$$\min_j \; \max_i a_{ij}$$

فيقال في هذه الحالة أن اللاعب الثاني اعتمد على معيار أصغر القيم العظمى Minimax Criterion في اختيار إستراتيجيته البسيطة ، أو يقال أنه اختار إستراتيجية أصغر القيم العظمى Minimax Strategy ·

وعلى ذلك فإنه بالنسبة لمجموعة الإستراتيجيات المتاحة لكل لاعب يكون لدينا المعيارين التاليين :

$$\text{maximin}\,[a_{ij}] = \max_i \; \min_j \; a_{ij}$$

$$\text{minimax}\,[a_{ij}] = \min_j \; \max_i \; a_{ij}$$

وبصفة عامة يلاحظ أن :

$$\max_i \; \min_j \; a_{ij} \leq \min_j \; \max_i \; a_{ij} \qquad (4\text{-}2)$$

أما إذا كان :

$$\max_i \; \min_j \; a_{ij} = \min_j \; \max_i \; a_{ij} = V \qquad (4\text{-}3)$$

فإن اللاعب الأول يمكن أن يختار إستراتيجية تمكنه من أن يحصل على الأقل على القيمة V ، وان اللاعب الثاني يمكن ان يختار إستراتيجية تضمن له أن اللاعب الأول سوف لا يحصل على أكثر من القيمة V . وفي هذه الحالة فإنه توجد إستراتيجيات i' , j' للاعبين تحقق المتباينة (4-1) .

وإذا تحقق الشرط (4-3) فإن مصفوفة العائد [a] يكون لها نقطة توازن عند i' , j' وتكون قيمة المباراة هي : $V = a_{i'j'}$.

وعلى ذلك فإن الشرط (4-3) يتحقق إذا كان هناك زوج من الإستراتيجيات i' , j' التي تحقق الشرط (4-1) ، ومن الشرط (4-1) يلاحظ أيضاً أن :

$$\max_{i} a_{ij'} = \min_{j} a_{i'j} = V$$

وهذا يعني أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمباراة نقطة توازن هو وجود عنصر في مصفوفة العائد يمثل في نفس الوقت أصغر قيمة في الصف وأكبر قيمة في العمود ، ويكون حل هذه المباراة هو حل ثابت ومستقر Solution Stable ويطلق عليه أيضاً " الحل التوازني " Equilibrium Solution .

أما إذا كان هناك مباراة لا يتحقق فيها الشرط (4-3) فنجد فيها بصفة عامة أن :

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} < \min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

فيعني ذلك أن هذه المباراة ليس لها نقطة توازن ، وفي هذه الحالة فإن من مصلحة كل لاعب أن يستخدم ما يسمى بالإستراتيجية المختلطة وهي عبارة عن التوزيع الاحتمالي الذي يحدد احتمالات معينة لاختيار كل من الإستراتيجيات البسيطة .

مثال (١) :

بفرض أن هناك موقفاً تنافسياً بين شركتين للمقاولات : شركة (A) وشركة (B) بشأن الإستراتيجيات المتعلقة بتعظيم نصيب كل منهما من العمالة الفنية المدربة • وسنفترض أن الحجم الكلي للعمالة الفنية المدربة في السوق المحلي ثابت ، ومن ثم فإن إحدى الشركتين لن تزيد من نصيبها من العمالة الفنية المدربة إلا على حساب الإقتطاع من نصيب الشركة الأخرى المنافسة لها • وبفرض أن كل شركة لديها ثلاث إستراتيجيات لاجتذاب عدد أكبر من العمالة الفنية المدربة هي : a_1 , a_2 , a_3 للشركة A ، b_1 , b_2 , b_3 للشركة B وأن النسب المنوية للعائد المتوقع لكل توليفة من إستراتيجيات الشركتين موضحة في مضفوفة العائد التالية :

الشركة B

الشركة A		b_1	B_2	b_3
	a_1	12	-4	11
	a_2	0	1	-10
	a_3	7	3	13

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل شركة من الشركتين المتنافستين ، وتحديد قيمة المباراة المثلى في هذه الحالة •

الحـل :

باتباع معيار أكبر القيم الصغرى بالنسبة للشركة A (أي بالنسبة لصفوف المصفوفة) ومعيار أصغر القيم العظمى بالنسبة للشركة B (أي بالنسبة لأعمدة المصفوفة) يلاحظ أن :

		الشركة B			
		b_1	b_2	b_3	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	a_1	12	- 4	11	- 4
	a_2	0	1	- 10	- 10
	a_3	7	3	13	[3]
أكبر قيمة في العمود		12	[3]	13	

بخصوص إستراتيجيات الشركة A (أي صفوف المصفوفة) فإن أكبر القيم الصغرى (Maximin) يساوي 3 ، أما بخصوص إستراتيجيات المصفوفة B (أي أعمدة المصفوفة) فإن أصغر القيم العظمى (Minimax) تساوي 3 ، أي أن :

أكبر القيم الصغرى = أصغر القيم العظمى = 3

فإن المباراة لها نقطة توازن (أي نقطة ركاب) وهي النقطة (a_3 , b_2) ويكون حلها ثابت ومستقر ، وتكون السياسة المثلى لكل من الشركتين هي : يتعين على الشركة A اختيار الإستراتيجية a_3 ، في حين يتعين على الشركة B أن تختار الإستراتيجية b_2 وتكون القيمة المثلى للمباراة هي 3% ، وحيث أن قيمة المباراة موجبة فيعني ذلك أن الشركة A سوف تكسب 3% بينما الشركة B سوف تخسر نفس القيمة أي 3% من العمالة الفنية المدربة .

مثال (٢) :

بفرض أن مصفوفة العائد بين الشركتين المتنافستين A ، B تأخذ الصورة التالية :

الشركة B

		b_1	b_2	b_3
الشركة A	a_1	20	8	- 6
	a_2	12	10	2
	a_3	3	5	6

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل شركة من الشركتين .

الحـل :

باتباع معياري أكبر القيم الصغرى بالنسبة للشركة A وأصغر القيم العظمى بالنسبة للشركة B يلاحظ أن :

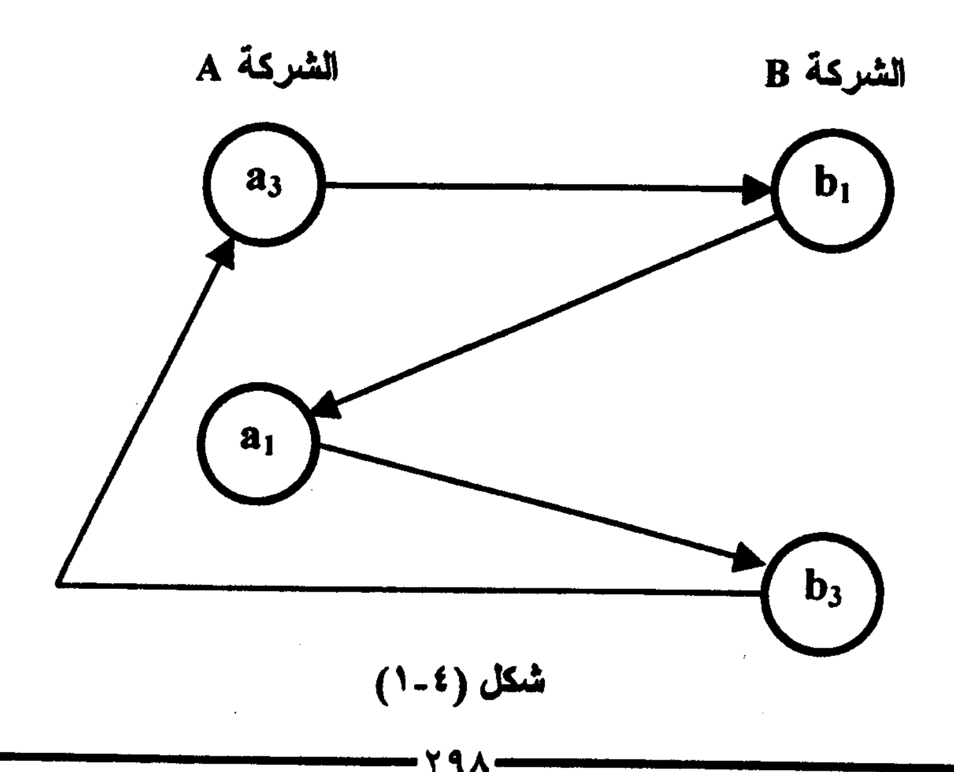
الشركة B

		b_1	b_2	b_3	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	a_1	20	8	- 6	- 6
	a_2	12	10	2	2
	a_3	3	5	6	[3]
أكبر قيمة في العمود		20	10	[6]	

بالنسبة للإستراتيجيات المتاحة للشركة A (أي صفوف المصفوفة) يلاحظ أن أكبر القيم الصغرى (Maximin) تساوي 3 ، أما بخصوص الإستراتيجيات المتاحة للشركة B (أي أعمدة المصفوفة) فإن أصغر القيم العظمى (Minimax) يساوي 6 ، أي أن :

أكبر القيم الصغرى ≠ أصغر القيم العظمى

فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن ، ويتضح ذلك في أنه إذا اختارت الشركة A الإستراتيجية الثالثة (أي a_3) مثلاً ، فإن الشركة B سوف ترد عليها باختيار الإستراتيجية الأولى (أي b_1) لتقليل العائد الذي تحصل عليه الشركة A إلى 3 فقط ٠ وفي حالة اختيار الشركة B للإستراتيجية b_1 فإن هذا بدوره يدفع الشركة A إلى اختيار الإستراتيجية a_1 ، هذا الاختيار من جانب الشركة A للإستراتيجية a_1 سوف يجعل الشركة B تسعى لاختيار الإستراتيجية b_3 موقعة بالشركة A خسارة قدرها 6 ، وفي حالة اختيار الشركة B الإستراتيجية b_3 سوف يدفع الشركة A إلى اختيار الإستراتيجية a_3 حتى تتجنب الخسارة وتحقق عائد قدره 6 ٠ وهكذا نكون قدر درنا دورة كاملة حتى نعود للمربع رقم [1] ، وأن أي حل آخر لهذه المباراة سوف يدور في دوائر متكررة غير منتهية كما يتضح ذلك من الشكل (٤-١) ٠



شكل (٤-١)

(٤-٢-٢) طريقة السيطرة والتسيد Dominance Method

بعض المباريات تكون غير مستقرة ولا يكون لها بالطبع نقطة توازن ، يمكن حلها بالتطبيق المتتالي لقاعدة السيطرة أو التسيد • هذه القاعدة تعني الإستبعاد المتتالي للإستراتيجيات المتنحية أو المحكومة والإبقاء على الإستراتيجية أو الإستراتيجيات الحاكمة أو المسيطرة •

ويقال عن إستراتيجية لاعب أنها متنحية أو محكومة بإستراتيجية أخرى سائدة أو مسيطرة إذا كانت الإستراتيجية المتنحية أو المحكومة تحقق عائداً مساوياً على الأكثر لما تحققه الإستراتيجية السائدة أو المسيطرة أو تقل عنها في قيمة واحدة على الأقل ، بحيث لا يقدم لاعب عاقل رشيد على اختيار الإستراتيجية المتنحية أبداً ، أي بغض النظر عما يختاره اللاعب الآخر •

والعكس ، يقال عن إستراتيجية لاعب أنها تحكم (أو تسيطر على) إستراتيجية أخرى إذا كانت هذه الإستراتيجية تحقق عائداً مساوياً على الأقل لما تحققه الإستراتيجية المتنحية وتتفوق عليها في قيمة واحدة على الأقل •

ويعني هذا أن اللاعب العاقل الرشيد لن يختار إستراتيجية متنحية مع وجود إستراتيجية أخرى تحكمها وتسيطر عليها ، لذلك فمن المنطقي أن يتم حذف الإستراتيجيات المتنحية سواء على مستوى الصفوف و/ أو الأعمدة بمصفوفة العائد •

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الطريقة دعنا نأخذ المثال التالي :

مثال (٣) :

نفرض أن هنالك لاعبين متنافسين هما : اللاعب A واللاعب B وكان اللاعب A أمامه ثلاث إستراتيجيات يمكنه أن يختار من بينها يرمز لها بالرموز c , b , a • بالمثل فإن اللاعب B متاح لديه ثلاث إستراتيجيات يمكنه

أن يختار من بينها يرمز لها بالرموز f , e , d ، بحيث إذا اختار اللاعب A الإستراتيجية a واختار اللاعب B الإستراتيجية d فلن يكسب أي منهما ، أما إذا اختار اللاعب A الإستراتيجية a بينما اختار اللاعب B الإستراتيجية e فإن اللاعب A سوف يخسر 2 أو أن اللاعب B سوف يكسب 2 ، وهكذا كما يتضح من مصفوفة العائد التالية :

		اللاعب B		
		d	e	f
اللاعب A	a	0	-2	7
	b	2	5	6
	c	3	-3	8

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل لاعب وتحديد قيمة المباراة .

الحل :

بتطبيق معيار أكبر القيم الصغرى بالنسبة للاعب A (صفوف المصفوفة) ومعيار أصغر القيم العظمى بالنسبة للاعب B (أعمدة المصفوفة) ، يلاحظ ما يلي :

		اللاعب B			
		d	E	F	أصغر قيمة في الصف
اللاعب A	a	0	-2	7	-2
	b	2	5	6	[2]
	c	3	-3	8	-3
أكبر قيمة في العمود		[3]	5	8	

بالنسبة للاعب A : أكبر القيم الصغرى يساوي 2

بالنسبة للاعب B : أصغر القيم العظمى يساوي 3

وكما هو واضح فإن أكبر القيم الصغرى لا يساوي أصغر القيم العظمى فتكون المباراة غير مستقرة ليس لها نقطة توازن ٠

بالبحث في إمكانية تطبيق قاعدة السيطرة أو التحكم (إن أمكن – لأن هذه الطريقة لا تصلح في كل الحالات على الإطلاق) والتي تتلخص رياضياً في الآتي : إذا كانت كل عناصر أحد الصفوف في مصفوفة العائد أقل من أو تساوي العناصر المناظرة لها في صف آخر ، فيكون هذا الصف متنحى ويتم حذفه ٠ وإذا كانت كل عناصر أحد الأعمدة في مصفوفة العائد أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في عمود آخر ، فيكون هذا العمود متنحى ويتم حذفه ٠

بالنظر إلى مصفوفة العائد في هذا المثال ، يلاحظ أنه بالنسبة للاعب A لا يوجد صف عناصره أصغر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في صف آخر ويعني هذا أنه لا توجد إستراتيجية متنحية للاعب A ٠ أما بخصوص اللاعب B فنجد أن عناصر العمود الثالث أكبر من العناصر المناظرة لها في العمود الثاني ، فيعني ذلك أن الإستراتيجية f تعد إستراتيجية متنحية والإستراتيجية e تسيطر عليها ، لذلك يتم حذف الإستراتيجية f ٠ ولعل السبب في ذلك هو افتراض أن اللاعب B عاقل ورشيد ولن يختار هذه الإستراتيجية أبداً ، بغض النظر عما يختاره اللاعب A ٠ وتصبح مصفوفة العائد من الترتيب (2 × 3) أي مكونة من ثلاثة صفوف (إستراتيجيات اللاعب A) وعمودين (إستراتيجيات اللاعب B) كالآتي :

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{اللاعب B} \\
\text{اللاعب A} & \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}
\begin{array}{cc} d & e \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{array}\right) \end{array}
\end{array}
$$

بالنظر إلى صفوف تلك المصفوفة يلاحظ أن عناصر الصف الأول أقل من العناصر المناظرة لها بالصف الثاني ، فتكون الإستراتيجية a متنحية والإستراتيجية b مسيطرة عليها ، لذلك يتم حذف الإستراتيجية a لنفس السبب ، حيث أن اللاعب A عاقل ورشيد ولن يختار الإستراتيجية a بغض النظر عما يختاره اللاعب B ، ويتم اختزال مصفوفة العائد لتصبح من الترتيب (2×2) كالآتي :

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{اللاعب B} \\
\text{اللاعب A} & \begin{array}{c} \\ b \\ c \end{array}
\begin{array}{cc} d & e \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{array}\right) \end{array}
\end{array}
$$

في المصفوفة السابقة لا يوجد صف كل عناصره أصغر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في الصف الآخر ، وفي نفس الوقت لا يوجد عمود كل عناصره أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في العمود الآخر ، وبالتالي لا توجد إستراتيجية متنحية من بين الإستراتيجيات b , c , d , e ، ولا يمكن بالتالي اختزال المصفوفة المتبقية ،

وكما هو واضح فإن مصفوفة العائد الناتجة ليس لها نقطة توازن وسوف يتم حلها بسهولة وفقاً لطريقة الإستراتيجيات المختلطة كما سنرى فيما بعد ٠

والمكسب الذي تحقق من تطبيق قاعدة السيطرة والتحكم هو تخفيض حجم مصفوفة العائد من الترتيب (3×3) إلى الترتيب (2×2) ، ولا شك أن هذا التخفيض سوف يحقق وفراً كبيراً في العمليات الحسابية المطلوبة للوصول إلى الحل الأمثل للنموذج وفقاً لطريقة الإستراتيجيات المختلطة كما سيتضح في الجزء التالي ٠

(٤-٢-٣) الإستراتيجيات المختلطة Mixed Strategies

إذا كان هناك مباراة ليس لها نقطة توازن يمكن التوصل إليها باستخدام معياري أكبر القيم الصغرى وأصغر القيم العظمى ، وفي نفس الوقت لا توجد في هذه المباراة إستراتيجية (أو إستراتيجيات) محكومة أو متنحية بإستراتيجية (أو إستراتيجيات) أخرى مسيطرة ، ومن ثم لا يمكن تخفيض حجم مصفوفة العائد ٠

في هذه الحالة لن يكون ملائماً لطرفي المباراة اختيار إستراتيجية وحيدة دائماً في لعب هذه المباراة وإنما ينتقي من الإستراتيجيات المتاحة أمامه بشكل عشوائي إستراتيجية ما بحيث يضع خصمه في حالة عدم تأكد والذي لا يستطيع بالتالي أن يبني إستراتيجيته على معرفته أو تخمينه لإختيار خصمه لإستراتيجية بعينها ٠ هذه الخطة البديلة في لعب المباريات التي ليس لها نقطة توازن على أساس إستراتيجية وحيدة مفردة دائماً تسمى بالإستراتيجية المختلطة ٠

وتعتمد فكرة الإستراتيجيات المختلطة على تكوين توزيع احتمالي لمجموعة الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف من طرفي المباراة ٠

بالنسبة للاعب A يتم إيجاد متجه الاحتمالات التالي :

$$P = (p_1 , p_2 , \ldots\ldots , p_m)$$

حيث :

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_m = 1$$

$$p_i \geq 0 \; ; \quad i = 1 , 2 , \ldots\ldots , m$$

p_i تمثل احتمال أن يختار اللاعب A الإستراتيجية i ،

m تمثل عدد الإستراتيجيات المتاحة أمام اللاعب A ،

بالنسبة للاعب B يتم إيجاد متجه الاحتمالات التالي :

$$Q = (q_1 , q_2 , \ldots\ldots , q_n)$$

حيث :

$$q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_n = 1$$

$$q_j \geq 0 \; ; \quad j = 1 , 2, \ldots\ldots , n$$

q_j تمثل احتمال أن يختار اللاعب B الإستراتيجية j ،

n تمثل عدد الإستراتيجيات المتاحة أمام اللاعب B ،

ويوجد طرق عديدة لإيجاد التوزيع الاحتمالي لمجموعة الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف من طرفي المباراة مثل : الطريقة البيانية والطريقة الجبرية وطريقة البرمجة الخطية وطريقة المصفوفات ، وسوف يكتفى هنا بتقديم تقييماً عاماً لكل طريقة من هذه الطرق ، ولمزيد من التفاصيل عن تلك الطرق يمكن الرجوع إلى المؤلف الشهير لكومار جوبتا وهيرا[1].

(1) Kumar Gupta, P., and Hira, D.S., **Operations Research,** S. Chand & Company LTD, New Delhi, 1999.

فالطريقة البيانية تعد طريقة تقريبية إلى حد كبير وتعتمد دقة نتائجها على الدقة في الرسم البياني ، فضلاً عن أنه يصعب تطبيقها إذا كانت مصفوفة العائد من الترتيب (3×3) أو (4×3) أو (3×4) وهكذا •

أما الطريقة الجبرية فيسهل استخدامها إذا كانت مصفوفة العائد من الترتيب (2×2) أو $(2 \times n)$ أو $(m \times 2)$ ، أما إذا كانت مصفوفة العائد من رتب أعلى من ذلك فيصعب تطبيق الطريقة الجبرية •

وطريقة البرمجة الخطية تتميز بأنها تلائم أي مصفوفة عائد مهما كان ترتيبها كبيراً ، ولكن يصاحب طريقة البرمجة الخطية استخدام طريقة السمبلكس لحل البرنامج الخطي الناتج وهذه الطريقة مرهقة حسابيا خصوصاً إذا كانت مصفوفة العائد من الترتيب (3×3) أو من رتب أعلى من ذلك •

وأخيراً فإن طريقة المصفوفات تتميز بأنه يمكن استخدامها سواء كانت مصفوفة العائد مربعة أو مستطيلة الشكل ومن أي ترتيب وتعطي نتائج دقيقة للحل الأمثل للمباراة •

لذلك سوف نركز هنا على طريقة المصفوفات كإحدى الطرق المستخدمة لإيجاد الإستراتيجيات المختلطة لكل طرف من طرفي المباراة •

طريقة المصفوفات Method of Matrices

تستخدم طريقة المصفوفات في تحديد الإستراتيجيات المختلطة المثلى لكل طرف من طرفي المباراة ذات المجموع الصفري •

بفرض أن مصفوفة العائد للمباراة هي المصفوفة $[a]$ من الترتيب $(m \times n)$ ، وأن اللاعب A متاح أمامه الإستراتيجيات : $1, 2, \ldots\ldots, m$

باحتمالات قدرها : $p_1 , p_2, ... , p_m$ على الترتيب ، وأن اللاعب B متاح أمامه الإستراتيجيات : $1, 2, ... , n$ باحتمالات قدرها : $q_1 , q_2, ... , q_n$ على الترتيب ، وبفرض أن القيمة المثلى للمباراة – كما سبق أن أسلفنا – هي V ،

وتستخدم طريقة المصفوفات في تحديد الاحتمالات المختلفة p_i حيث $(i = 1,2, ... , m)$ للاعب A ، والاحتمالات المختلفة q_j حيث $(j = 1,2, ... , n)$ للاعب B وكذلك تحديد القيمة المثلى للمباراة ، V ، وذلك من خلال الخطوات التالية في كل من الحالتين الآتيتين :

الخطوة 1 :

الحالة الأولى : إذا كانت مصفوفة العائد [a] مستطيلة الشكل حيث : $m \neq n$

في هذه الحالة يتم تجزئة مصفوفة العائد [a] إلى مجموعة من البدائل كل بديل يشمل مصفوفة عائد مربعة من الترتيب : $(i \times i)$ حيث $i = m$ إذا كان $m < n$ ، بينما $i = n$ إذا كان $n < m$ ، ولنرمز لكل مصفوفة مربعة منها بالرمز $[x]_r$ ،

فمثلاً ، إذا كانت مصفوفة العائد [a] لإحدى المباريات من الترتيب (2×3) على الصورة :

$$[a] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

ففي هذه الحالة يتم تجزئة المصفوفة [a] إلى ثلاثة بدائل مختلفة كل بديل منها عبارة عن مصفوفة جزئية مربعة الشكل من الترتيب (2×2) كما يلي :

البديل الأول هو :

$$[x]_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

البديل الثانـي هو :

$$[x]_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

البديل الثالث هو :

$$[x]_3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

الحالة الثانية : إذا كانت مصفوفة العائد [a] مربعة الشكل حيث : $m = n$ ·

فـي هـذه الحالـة تؤخذ المصـفوفة [x] كبديل وحيد هو نفسـه المصـفوفة [a] ، بمعنى أن :

$$[x] = [a]$$

الخطوة 2 :

لكل مصـفوفة مربعة [x] يـتم إيجـاد قيمة محـدد المصـفوفة ويرمـز لـه بالرمز Δ_x ، حيث $\Delta_x \neq 0$ ·

الخطوة 3 :

يتم إيجاد مصفوفات المرافقات Cofactor Matrix للمصفوفة [x] ولنرمز لها بالرمز [y] • ويعرف مرافق العنصر a_{ij} بأنه قيمة المحدد الناتج بعد حذف الصف i والعمود j المشتملين على العنصر a_{ij} مضروباً في $(-1)^{i+j}$ •

فإذا أخذنا المصفوفة $[x]_1$ ، على سبيل المثال ، يلاحظ أن :

مرافق العنصر a_{12} هو :

$$a_{21}(-1)^{1+2} = -a_{21}$$

أما مرافق العنصر a_{22} هو :

$$a_{11}(-1)^{1+1} = a_{11}$$

وهكذا •

الخطوة 4 :

يتم إيجاد مبدول مصفوفة المرافقات [y] ولنرمز له بالرمز [y′] ، ويتم ذلك من خلال تحويل صفوف المصفوفة إلى أعمدة أو تحويل أعمدة المصفوفة إلى صفوف بحسب ترتيبها أي بجعل الصف الأول عمود أول ، الصف الثاني عمود ثاني وهكذا •

الخطوة 5 :

يتم حساب القيمة :

$$[1\ 1\ \ldots\ldots\ 1]\,[y]\begin{bmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\end{bmatrix}$$

ولنرمز لتلك القيمة بالرمز G

حيث : [1 1 ...... 1] هو متجه صفي من الترتيب (1 x i) أي مكون من صف واحد ، i أعمدة وكل عناصره تساوي الواحد الصحيح ،

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

هو متجه عمودي من الترتيب (i x 1) ، أي يشتمل على i صفوف وعمود واحد وكل عناصره تساوي الواحد الصحيح .

الخطوة 6 :

يتم حساب الاحتمالات المختلفة التي يختار بها اللاعب A عدد i من الإستراتيجيات المتاحة أمامه وفقاً للقاعدة التالية :

$$[p_1, p_2, \ldots\ldots, p_i] = [1, 1, \ldots\ldots, 1]\,[y']\,/\,G$$

بالمثل ، يتم حساب الاحتمالات المختلفة التي يختار بها اللاعب B عدد i من الإستراتيجيات المتاحة أمامه وفقاً للقاعدة التالية :

$$[q_1, q_2, \ldots\ldots, q_i] = [1, 1, \ldots\ldots, 1]\,[y]\,/\,G$$

القيمة المثلى للمباراة تحسب كما يلي :

$$V = \Delta_x / G$$

الخطوة 7 :

في الحالة الأولى من الخطوة 1 ، وهي عندما تكون مصفوفة العائد [a] مستطيلة الشكل من الترتيب (m x n) حيث m ≠ n ، فيكون البديل أمثل من

بين مجموعة البدائل الممكنة إذا حقق الشروط التالية بالنسبة لكل طرف من طرفي المباراة :

أ - بالنسبة للاعب A :

$$(1) \quad p_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m \qquad (4\text{-}4)$$

ويعني هذا الشرط أن تكون قيم الاحتمالات التي يختار بها اللاعب A الإستراتيجيات المتاحة أمامه موجبة أو تساوي الصفر ، فإذا كان أحد هذه الاحتمالات سالب القيمة فيرفض هذا البديل .

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \qquad (4\text{-}5)$$

ويعني هذا الشرط أن يكون مجموع الاحتمالات التي يختار بها اللاعب A الإستراتيجيات المتاحة أمامه مساويا للواحد الصحيح ، فإذا لم يتحقق هذا الشرط يرفض هذا البديل .

$$(3) \quad a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + \ldots\ldots + a_{m1}\, p_m \geq V$$

$$a_{12}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + \ldots\ldots + a_{m2}\, p_m \geq V$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\, p_m \geq V$$

ويمكن اختصار عرض هذا الشرط في الصورة التالية :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i \geq V \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n) \qquad (4\text{-}6)$$

ب - بالنسبة للاعب B :

(4) $q_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n$ (4-7)

وبالطريقة نفسها يعني هذا الشرط أن قيم الاحتمالات التي يختار بها اللاعب B الإستراتيجيات المتاحة أمامه يجب أن تكون موجبة أو تساوي الصفر ، وإذا كان أحد هذه الاحتمالات سالب القيمة فيرفض هذا البديل •

(5) $$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$ (4-8)

ويعني هذا الشرط أن يكون مجموع الاحتمالات التي يختار بها اللاعب B الإستراتيجيات المتاحة أمامه مساوياً للواحد الصحيح ، وعدم تحقق هذا الشرط يعني رفض ذلك البديل •

(6)
$$\begin{aligned}
&a_{11}\, q_1 + a_{12}\, q_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\, q_n \leq V \\
&a_{21}\, q_1 + a_{22}\, q_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\, q_n \leq V \\
&\vdots \\
&a_{m1}\, q_1 + a_{m2}\, q_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\, q_n \leq V
\end{aligned}$$

ويمكن عرض هذا الشرط في الصورة المختصرة التالية :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j \leq V \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$ (4-9)

فإذا ما تحققت الشروط من (4-4) حتى (4-6) بالنسبة للاعب A وفي نفس الوقت تحققت الشروط من (4-7) حتى (4-9) بالنسبة للاعب B يكون هذا البديل هو البديل الأمثل والذي يحدد قيمة الاحتمالات $P = [p_1, p_2, \ldots, p_m]$

التي يتعين على اللاعب A أن يختار بها الإستراتيجيات المتاحة أمامه ، ويحدد بالمثل متجه الاحتمالات $Q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ التي يتعين على اللاعب B أن يختار بها الإستراتيجيات المتاحة أمامه ، بالإضافة إلى تحديد القيمة المثلى للمباراة وهي V ·

ولتوضيح كيفية استخدام طريقة المصفوفات في حل نماذج المباريات التي ليس لها نقطة توازن ، دعنا نأخذ الأمثلة التالية :

مثال (٤) :

شركتان A ، B متنافستان للسيطرة على أكبر عدد ممكن من العملاء ، الشركة A متاح لديها إستراتيجيتين هما : a_1 , a_2 ، كما أن الشركة B متاح لديها أيضاً إستراتيجيتين هما : b_1 , b_2 · وكانت مصفوفة العائد بينهما (بالمليون جنيه) موضحة كما يلي :

الشركة B

		b_1	b_2
الشركة A	a_1	-3	7
	a_2	6	1

المطلوب :

إيجاد الحل الأمثل للمباراة ·

الحـل :

باستخدام معيار أكبر القيم الصغرى وأصغر القيم العظمى يلاحظ ما يلي :

الشركة B

		b_1	b_2	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	a_1	-3	7	-3
	a_2	6	1	1 → Maximin
	أكبر قيمة في العمود	6	7	

Minimax ↑ 6

أكبر القيم الصغرى = 1

أصغر القيم العظمى = 6

وحيث أن أكبر القيم الصغرى ≠ أصغر القيم العظمى ، فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن •

كما يلاحظ أيضاً أنه لا توجد إستراتيجية محكومة أو متنحية وأخرى سائدة أو مسيطرة لأي من الشركتين ، ومن ثم لا يمكن تخفيض مصفوفة العائد ، وفي هذه الحالة يتعين على كل من الشركتين استخدام الإستراتيجيات المختلطة •

حيث أن مصفوفة العائد من الترتيب (2×2) لذلك يوجد بديل واحد فقط أمام كل من الشركتين A ، B •

نفرض أن الشركة A سوف تختار الإستراتيجيتين a_1 , a_2 باحتمالين قدرهما p_1 , p_2 على الترتيب ، كما أن الشركة B سوف تختار الإستراتيجيتين b_1 , b_2 باحتمالين قدرهما q_1 , q_2 على الترتيب •

يتم التوصل للحل الأمثل للمباراة باستخدام طريقة المصفوفات وفقاً للخطوات التالية :

الخطوة 1 :

المصفوفة [x] تساوي مصفوفة العائد [a] .

$$[x] = [a] = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة [x] هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (6)(7) = -45$$

الخطوة 3 :

تحسب مصفوفة المرافقات للمصفوفة [x] ونرمز لها بالرمز [y]

$$[y] = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

يتم إيجاد مبدول مصفوفة المرافقات وهي [y'] :

$$[y'] = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تحسب القيمة G ، حيث :

$$G = [1 \quad 1]\,[y]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1]\begin{pmatrix}1 & -6\\-7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= [-6 \quad -9]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -15$$

الخطوة 6 :

متجه الاحتمالات للشركة A :

$$[p_1 \quad p_2] = ([1 \quad 1]\,[y'])\,/\,G$$

$$= \frac{[1 \quad 1]\begin{pmatrix}1 & -7\\-6 & -3\end{pmatrix}}{-15} = \frac{[-5 \quad -10]}{-15}$$

$$= \left[\frac{-5}{-15} \quad \frac{-10}{-15}\right] = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right]$$

متجه الاحتمالات للشركة B :

$$[q_1 \quad q_2] = ([1 \quad 1]\,[y])\,/\,G$$

$$= \frac{[1 \quad 1]\begin{pmatrix}1 & -6\\-7 & -3\end{pmatrix}}{-15} = \frac{[-6 \quad -9]}{-15}$$

$$= [\ \frac{-6}{-15} \quad \frac{-9}{-15}\ ] = [\ \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5}\ ]$$

الخطوة 7 :

القيمة المثلى للمباراة هي :

$$V = \frac{\Delta_x}{G} = \frac{-45}{-15} = 3$$

ويكون الحل الأمثل للمباراة على النحو التالي :

بخصوص الشركة A : عليها أن تختار الإستراتيجية a_1 باحتمال قدره $\frac{1}{3}$ والإستراتيجية a_2 باحتمال قدره $\frac{2}{3}$ ·

بخصوص الشركة B : عليها أن تختار الإستراتيجية b_1 باحتمال قدره $\frac{2}{5}$ والإستراتيجية b_2 باحتمال قدره $\frac{3}{5}$ ·

ويتحقق ذلك على المستوى العملي كما يلي :

بفرض أن المدة الزمنية المخصصة لإدارة هذا الصراع هي 30 يوماً ، فإن على الشركة A أن تختار الإستراتيجية a_1 عدداً من الأيام يساوي (أيام $10 = \frac{1}{3} \times 30$) من الشهر ثم تختار الإستراتيجية a_2 عدداً من الأيام يساوي (يوما $20 = \frac{2}{3} \times 30$) من الشهر ·

بالمثل ، فإن الشركة B يتوجب عليها أن تختار الإستراتيجية b_1 عدداً من الأيام يساوي (يوما $12 = \frac{2}{5} \times 30$) من الشهر ، ثم تختار الإستراتيجية b_2 عدداً من الأيام يساوي (يوما $18 = \frac{3}{5} \times 30$) من الشهر ·

والقيمة المثلى للمباراة هي :

$V = 3$ (مليون جنيه)

وحيث أن تلك القيمة موجبة الإشارة فيعني ذلك أن الشركة A سوف تكسب من هذا الصراع 3 مليون جنيه ، وفي نفس الوقت سوف تخسر الشركة B نفس القيمة أي 3 مليون جنيه ٠

مثال (٥) :

شركتان A ، B لصناعة السيارات في موقف تنافسي لإجتذاب أكبر عدد ممكن من العملاء وبالتالي تحقيق أكبر عائد ممكن ٠ فإذا كانت الشركة A أمامها الاختيار بين ثلاث إستراتيجيات هي : a_1 , a_2 , a_3 ، وبالمثل ، فإن الشركة B أمامها الاختيار بين ثلاث إستراتيجيات هي : b_1 , b_2 , b_3 ٠ فإذا خصصت كل شركة مبلغ 6 مليون دولار لإدارة هذا الصراع ، وكانت مصفوفة العائد بين الشركتين (بالمليون دولار) كما يلي :

الشركة B

$$\text{الشركة A}\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

المطلوب :

إيجاد الحل الأمثل للمباراة ٠

الحل :

وفقا لمعيار أكبر القيم الصغرى وأصغر القيم العظمى فإن :

الشركة B

		b_1	b_2	b_3	أصغر قيمة في الصف
	a_1	7	1	7	1
الشركة A	a_2	9	- 1	1	- 1
	a_3	5	7	6	5 → Maximin
أكبر قيمة في العمود		9	7	6	
				↓ Minimax	

كما هو واضح فإن :

أكبر القيم الصغرى (Maximin) = 5

أصغر القيم العظمى (Minimax) = 6

وحيث أن أكبر القيم الصغرى لا يساوي أصغر القيم العظمى فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن ٠

ومن ناحية أخرى يلاحظ أنه لا توجد إستراتيجية محكومة وأخرى مسيطرة لأي من الشركتين المتنافستين وبالتالي لا يمكن تخفيض حجم مصفوفة العائد عن الترتيب (3 × 3) ٠ وحيث أن مصفوفة العائد مربعة الشكل فيوجد بديل واحد أمام كل من الشركتين ٠

نفرض أن الشركة A سوف تختار الإستراتيجيات الثلاثة المتاحة لديها وهي : a_1 , a_2 , a_3 باحتمالات قدرها p_1 , p_2 , p_3 على الترتيب والشركة B سوف تختار إستراتيجياتها b_1 , b_2 , b_3 باحتمالات قدرها q_1 , q_2 , q_3 على الترتيب ٠

وتستخدم طريقة المصفوفات لتحديد قيم الاحتمالات p_i حيث (i = 1 , 2 , 3) ، q_j حيث (j = 1 , 2 , 3) من خلال الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

في هذه الحالة فإن المصفوفة [x] هي نفسها المصفوفة [a] .

$$[x] = [a] = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة [x] (باستخدام عناصر الصف الأول) هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 7 (-6 - 7) - 1 (54 - 5) + 7 (63 + 5) = 336$$

الخطوة 3 :

يتم إيجاد مصفوفة المرافقات للمصفوفة [x] وهي [y] .

$$[y] = \begin{pmatrix} -13 & -49 & 68 \\ 43 & 7 & -44 \\ 8 & 56 & -16 \end{pmatrix}$$

فعلى سبيل المثال :

مرافق العنصر a_{11} من عناصر المصفوفة [x] يحسب كما يلي :

$$(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (1)\,(-6-7) = -13$$

مرافق العنصر a_{21} من عناصر المصفوفة [x] يحسب كما يلي :

$$(-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\,(6-49) = 43$$

وهكذا بالنسبة لباقي عناصر المصفوفة [x] .

الخطوة 4 :

يتم إيجاد مبدول مصفوفة المرافقات وهي [y′] ، حيث :

$$[y'] = \begin{pmatrix} -13 & 43 & 8 \\ -49 & 7 & 56 \\ 68 & -44 & -16 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تحسب القيمة G كما يلي :

$$G = [1 \quad 1 \quad 1]\,[y] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{pmatrix} -13 & -49 & 68 \\ 43 & 7 & -44 \\ 8 & 56 & -16 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [38 \quad 14 \quad 8] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 60$$

الخطوة 6 :

$$[p_1 \quad p_2 \quad p_3] = \frac{[1 \quad 1 \quad 1]\,[y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1 \quad 1] \begin{pmatrix} -13 & 43 & 8 \\ -49 & 7 & 56 \\ 68 & -44 & -16 \end{pmatrix}}{60}$$

$$= \frac{[6 \quad 6 \quad 48]}{60} = \left[\frac{6}{60} \quad \frac{6}{60} \quad \frac{48}{60}\right]$$

$$= [0.1 \quad 0.1 \quad 0.8]$$

إذن :

$$p_1 = 0.1 \quad , \quad p_2 = 0.1 \quad , \quad p_3 = 0.8$$

بالمثل ، فإن :

$$[q_1 \quad q_2 \quad q_3] = \frac{[1 \quad 1 \quad 1]\,[y]}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1 \quad 1] \begin{pmatrix} -13 & -49 & 68 \\ 43 & 7 & -44 \\ 8 & 56 & -16 \end{pmatrix}}{60}$$

$$= \frac{[38 \quad 14 \quad 8]}{60} = \left[\frac{38}{60} \quad \frac{14}{60} \quad \frac{8}{60} \right]$$

إذن :

$$q_1 = \frac{38}{60} \quad , \quad q_2 = \frac{14}{60} \quad , \quad q_3 = \frac{8}{60}$$

القيمة المثلى للمباراة هي :

$$V = \Delta_x \,/\, G = \frac{336}{60} = 5.6$$

ويكون الحل الأمثل للمباراة هو :

يتوجب على الشركة A أن تختار الإستراتيجية a_1 باحتمال قدره $\frac{6}{60}$ ، والإستراتيجية a_2 باحتمال قدر $\frac{6}{60}$ ، والإستراتيجية a_3 باحتمال $\frac{48}{60}$. ومن

مصلحة الشركة A أن توزع مبلغ 6 مليون دولار المخصص لإدارة الصراع بين الإستراتيجيات الثلاثة على النحو التالي :

تنفق على الإستراتيجية a_1 مبلغ قدره (مليون دولار $0.6 = 6 \times \frac{6}{60}$)

تنفق على الإستراتيجية a_2 مبلغ قدره (مليون دولار $0.6 = 6 \times \frac{6}{60}$)

تنفق على الإستراتيجية a_3 مبلغ قدره (مليون دولار $4.8 = 6 \times \frac{48}{60}$)

أما الشركة B فيتوجب عليها أن تختار الإستراتيجية b_1 باحتمال قدره $\frac{38}{60}$ ، والإستراتيجية b_2 باحتمال قدره $\frac{14}{60}$ ، والإستراتيجية b_3 باحتمال قدره $\frac{8}{60}$. ويتعين عليها أن تنفق المبلغ الذي خصصته لإدارة الصراع كما يلي :

تنفق على الإستراتيجية b_1 مبلغ قدره (مليون دولار $3.8 = 6 \times \frac{38}{60}$)

تنفق على الإستراتيجية b_2 مبلغ قدره (مليون دولار $1.4 = 6 \times \frac{14}{60}$)

تنفق على الإستراتيجية b_3 مبلغ قدره (مليون دولار $0.8 = 6 \times \frac{8}{60}$)

وحيث أن قيمة المباراة المثلى تساوي 5.6 وهي موجبة الإشارة فالشركة A سوف تكسب من هذا الصراع مبلغ 5.6 مليون دولار ، بينما الشركة B سوف تخسر نفس القيمة وهي 5.6 مليون دولار .

مثال (٦) :

في إطار المنافسة بين الشركتين A و B للمنظفات الصناعية ، كان على الشركة A أن تختار بين بديلين هما : خفض سعر المنتج (a_1) أو زيادة

حجم العبوة من المنتج (a_2) ، بينما الشركة B فمتاح أمامها الاختيار من بين ثلاثة بدائل هي : طرح منتج جديد (b_1) أو رفع سعر المنتج الحالي (b_2) أو زيادة الحملة الإعلانية عن المنتج الحالي (b_3) • وكانت مصفوفة العائد بين الشركتين (بالمليون جنيه) كما هو موضح :

الشركة B

$$\text{الشركة A}\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

المطلوب :

إيجاد الإستراتيجية المثلى لكل شركة وحساب القيمة المثلى للمباراة •

الحل :

بتطبيق معيار أكبر القيم الصغرى وأصغر القيم العظمى ينتج أن :

الشركة B

		b_1	b_2	b_3	أصغر قيمة في الصف
الشركة A	a_1	- 3	- 2	2	[- 3]
	a_2	1	3	- 5	- 5
أكبر قيمة في العمود		[1]	3	2	

حيث أن :

أكبر القيم الصغرى = 3 - ، أصغر القيم العظمى = 1

فتكون المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن •

ووفقاً لقاعدة التحكم والسيطرة لا توجد إستراتيجية أو إستراتيجيات مسيطرة وأخرى متنحية لأي من الشركتين وبالتالي لا يمكن تخفيض حجم مصفوفة العائد ٠

حيث أن مصفوفة العائد تتكون من صفين وثلاثة أعمدة فهي من الترتيب (3 × 2) ، لذلك سوف يكون هناك أكثر من بديل أمام طرفي المباراة ، كل بديل يشتمل على مصفوفة عائد من الترتيب (2 × 2) ٠ والبديل الذي يحقق الشروط من (4 - 4) حتى (9 - 4) سوف يكون هو البديل الأمثل والذي يحقق مصلحة كل من الشركتين المتنافستين في نفس الوقت ٠

بفرض أن الشركة A سوف تختار الإستراتيجيتين a_2 , a_1 باحتمالين قدرهما p_2 , p_1 على الترتيب ، كما أن الشركة B سوف تختار الإستراتيجيات b_3 , b_2 , b_1 باحتمالات قدرها q_3 , q_2 , q_1 على الترتيب ٠

البديل الأول :

تختار الشركة A الإستراتيجيتين a_2 , a_1 وتختار الشركة B الإستراتيجيتين b_2 , b_1 ولا تختار الإستراتيجية b_3 (وبالتالي فإن $q_3 = 0$) ٠

يتم حل هذا البديل من خلال الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

المصفوفة [x] هي :

$$[x] = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(3) - (1)(-2) = -7$$

الخطوة 3 :

مصفوفة المرافقات للمصفوفة [x] هي :

$$[y] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

مبدول مصفوفة المرافقات هي :

$$[y'] = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تحسب القيمة G ، حيث :

$$G = [1 \quad 1]\,[y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [5 \quad -4] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

الخطوة 6 :

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1]\,[y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1]\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \frac{[2 \quad -1]}{1}$$

$$= [\frac{2}{1} \quad \frac{-1}{1}] = [2 \quad -1]$$

يعني ذلك أن $p_1 = 2$, $p_2 = -1$ لذلك يرفض هذا البديل تماماً لعدم تحقق الشرط (4 - 4) فالقيمة الإحتمالية لا يمكن أن تكون أكبر من الواحد الصحيح كما لا يمكن أن تكون سالبة .

البديل الثاني :

تختار الشركة A الإستراتيجيتين a_1 , a_2 وتختار الشركة B الإستراتيجيتين b_1 , b_3 ولا تختار الإستراتيجية b_2 (وبالتالي فإن $q_2 = 0$) .

يتم حل هذا البديل وفقاً للخطوات التالية :

الخطوة 1 :

المصفوفة [x] وفقاً لهذا البديل هي :

$$[x] = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة [x] هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3)(-5) - (1)(2) = 13$$

الخطوة 3 :

مصفوفة المرافقات للمصفوفة [x] هي :

$$[y] = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

مبدول مصفوفة المرافقات [y] هو :

$$[y'] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تحسب القيمة G ، حيث :

$$G = [1 \quad 1]\,[y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [-7 \quad -4] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -11$$

الخطوة 6 :

متجه الاحتمالات للشركة A هو :

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1]\,[y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}{-11}$$

$$= \frac{[-6 \quad -5]}{-11} = \left[\frac{-6}{-11} \qquad \frac{-5}{-11}\right]$$

$$= \left[\frac{6}{11} \qquad \frac{5}{11}\right]$$

ومن ثم ينتج أن :

$$p_2 = \frac{5}{11} \qquad , \qquad p_1 = \frac{6}{11}$$

وحيث أن قيمة كل من p_2 , p_1 موجبة ومجموعهما يساوي الواحد الصحيح فيكون الشرطان (4 - 4) ، (5 - 4) متحققين ٠

بالمثل ، فإن متجه الاحتمالات للشركة B هو :

$$[q_1 \quad q_3] = \frac{[1 \quad 1]\,[y]}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1]\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}{-11}$$

$$= \frac{[-7 \quad -4]}{-11} = \left[\frac{-7}{-11} \quad \frac{-4}{-11}\right]$$

$$= \left[\frac{7}{11} \quad \frac{4}{11}\right]$$

إذن ،

$$q_3 = \frac{4}{11} \quad , \quad q_1 = \frac{7}{11}$$

وحيث أن قيمة كل من q_3 , q_1 موجبة ومجموعهما يساوي الواحد الصحيح فيكون الشرطان (7 - 4) ، (8 - 4) متحققين أيضاً •

قيمة المباراة هي :

$$V = \frac{\Delta_x}{G} = \frac{13}{-11} = -\frac{13}{11}$$

لاختبار مدى تحقق الشرط (6 - 4) وهو :

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, p_i \geq V \qquad j = 1, 2, 3$$

$$-3\left(\frac{6}{11}\right) + 1\left(\frac{5}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \qquad \text{O.K.}$$

$$-2\left(\frac{6}{11}\right) + 3\left(\frac{5}{11}\right) = \frac{3}{11} > V \qquad \text{O.K.}$$

$$2\left(\frac{6}{11}\right) + (-5)\left(\frac{5}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \qquad \text{O.K.}$$

وكما هو واضح فإن هذا البديل قد اجتاز الشرط (4 - 6) .

وأخيراً لاختبار مدى تحقق الشرط (4 - 9) وهو :

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, q_j \leq V \qquad i = 1, 2$$

$$-3\left(\frac{7}{11}\right) + (-2)(0) + 2\left(\frac{4}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \qquad \text{O.K.}$$

$$1\left(\frac{7}{11}\right) + 3(0) + (-5)\left(\frac{4}{11}\right) = -\frac{13}{11} = V \qquad \text{O.K.}$$

وكما هو واضح فإن البديل الحالي قد اجتاز أيضاً الشرط الأخير (4 - 9) ، وبذلك يكون هذا البديل هو البديل الأمثل وتكون السياسة المثلى التي تحقق المصلحة لكل من الشركتين المتنافستين هي على النحو التالي :

بالنسبة للشركة A : عليها أن تختار الإستراتيجية الأولى a_1 ، باحتمال قدره $\frac{5}{11}$ ، وتختار الإستراتيجية الثانية a_2 ، باحتمال قدره $\frac{6}{11}$.

أما الشركة B : فيتعين عليها أن تختار الإستراتيجية الأولى لها b_1 ، باحتمال قدره $\frac{7}{11}$ ، وتختار الإستراتيجية الثالثة لها b_3 ، باحتمال قدره $\frac{4}{11}$ ، وألا تختار الإستراتيجية الثانية b_2 ، على الإطلاق . وتكون قيمة المباراة المثلى هي :

$$V = -\frac{13}{11} = -1.182 \qquad (\text{مليون جنيه})$$

وحيث أن هذه القيمة سالبة الإشارة فيعني ذلك أن الشركة A سوف تخسر في هذه المباراة 1.182 مليون جنيه بينما الشركة B سوف تكسب نفس القيمة .

سوف يتم بعد ذلك تناول البديل الثالث لمعرفة ما إذا كان هناك حل أمثل آخر للمباراة يحقق نفس القيمة وهي 1.182 مليون جنيه أم لا .

البديل الثالث :

تختار الشركة A الإستراتيجيتين a_1 , a_2 وتختار الشركة B الإستراتيجيتين b_2 , b_3 ولا تختار الإستراتيجية b_1 (وبالتالي فإن $q_1 = 0$) .

يتم حل هذا البديل وفقاً للخطوات التالية :

الخطوة 1 :

المصفوفة [x] وفقاً لهذا البديل هي :

$$[x] = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 :

محدد المصفوفة [x] هو :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-2)(-5) - (3)(2) = 4$$

الخطوة 3 :

مصفوفة المرافقات للمصفوفة [x] هي :

$$[y] = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4 :

مبدول مصفوفة المرافقات [y] هو :

$$[y'] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

الخطوة 5 :

تحسب القيمة G ، حيث :

$$G = [1 \quad 1]\,[y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [1 \quad 1] \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [-7 \quad -5] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -12$$

الخطوة 6 :

متجه الاحتمالات للشركة A هو :

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1]\,[y']}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1]\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{-12}$$

$$= \frac{[-8 \quad -4]}{-12} = [\frac{8}{12} \quad \frac{4}{12}]$$

بالمثل ، فإن متجه الاحتمالات للشركة B هو :

$$[q_2 \quad q_3] = \frac{[1 \quad 1]\,[y]}{G}$$

$$= \frac{[1 \quad 1]\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}{-12}$$

$$= \frac{[-7 \quad -5]}{-12} = [\frac{7}{12} \quad \frac{5}{12}]$$

من هذه الخطوة ينتج أن :

$p_2 = \frac{4}{12}$ ، $p_1 = \frac{8}{12}$ فكلاهما موجب القيمة ومجموعهما يساوي الواحد الصحيح فيكون الشرطان (4 - 4) ، (5 - 4) متحققين . كما أن :

$q_1 = \frac{7}{12}$ ، $q_2 = \frac{5}{12}$ وكلاهما موجب القيمة ومجموعهما يساوي الواحد الصحيح ويكون الشرطان (7 - 4) ، (8 - 4) أيضاً متحققين .

قيمة المباراة وفقاً لهذا البديل هي :

$$V = \frac{\Delta_x}{G} = \frac{4}{-12} = -\frac{4}{12}$$

ثم نختبر مدى تحقق الشرط (6 - 4) وهو :

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\ p_i \geq V \qquad j = 1, 2, 3$$

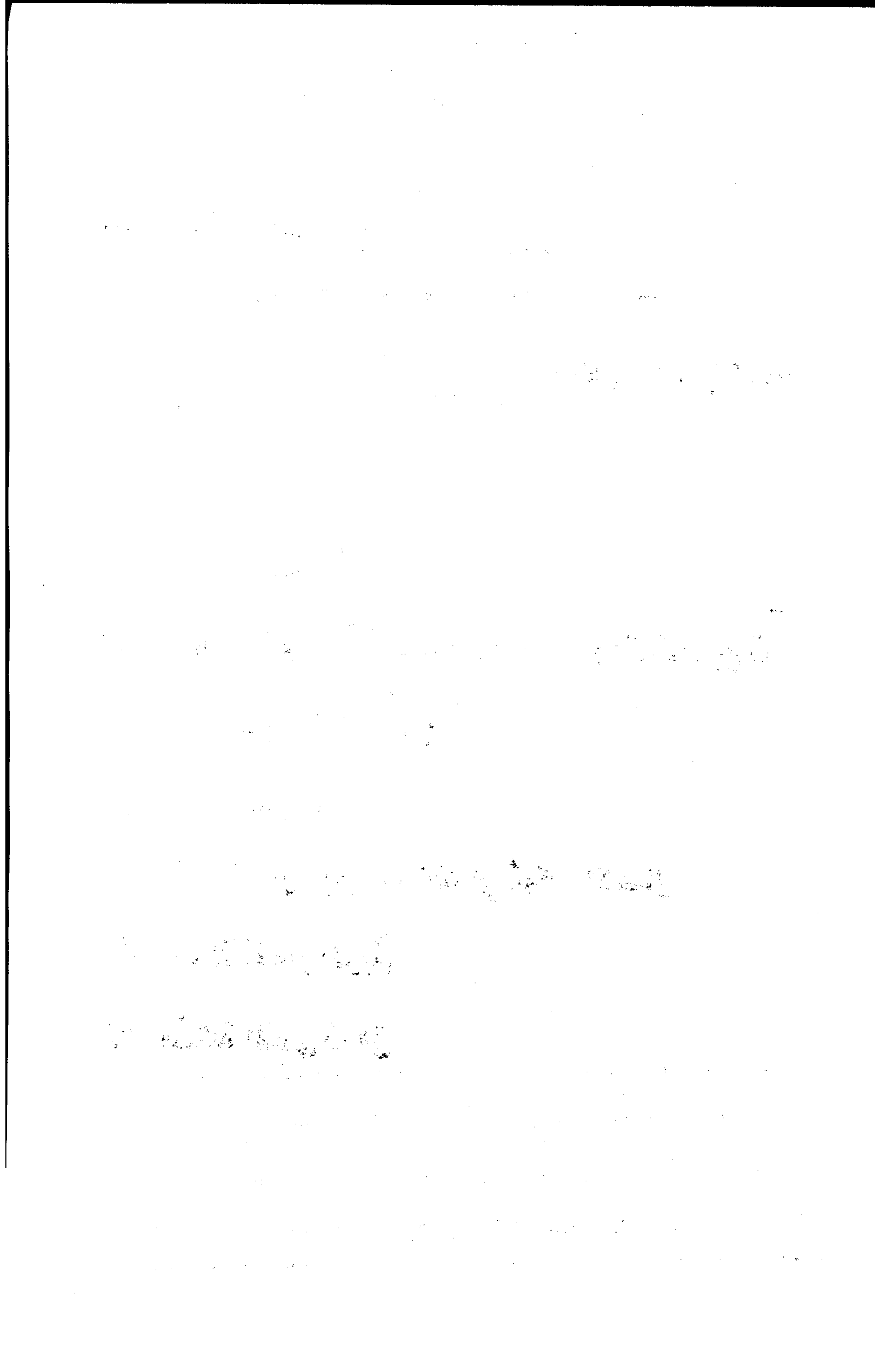
$$-3\left(\frac{8}{12}\right) + 1\left(\frac{4}{12}\right) = -\frac{20}{12} < V = -\frac{4}{12}$$

ويكون الشرط (6 - 4) بذلك غير متحقق ومن ثم يرفض هذا البديل ، ويكون البديل الثاني – كما أسلفنا – هو البديل الوحيد الأمثل .

الباب الخامس

تحليل الشبكات

- تعريف الشبكة
- شبكات الأعمال : شبكات المسار الحرج وشبكات بيرت
    - أسلوب المسار الحرج
    - أسلوب بيرت
    - تحليل الوقت / تكلفة في شبكات الأعمال
- مشكلة أقصر طريق
- مشكلة أقصى تدفق



الباب الخامس
تحليل الشبكات
Network Analysis

(٥-١) تعريف الشبكة :

الشبكة هي مجموعة من الأحداث events (أو العقد nodes أو الرؤوس vertices) ومجموعة من الأنشطة activities (أو الأقواس arcs أو الأفرع branches أو الوصلات links) التي تصل بين أزواج من الأحداث ويرمز للأحداث بحروف أو بأعداد متسلسلة ، وللأنشطة بأسماء الأحداث التي تصل بينها •

ويوجد عدة أنواع من الشبكات نذكر منها : شبكات الأعمال وشبكات أقصر طريق وشبكات أقصى تدفق ، وسوف نتناول هذه الأنواع من الشبكات بالتحليل •

(٥-٢) شبكات الأعمال : شبكات المسار الحرج وبيرت
CPM / PERT Networks

تعتبر شبكة الأعمال تمثيل بياني للأنشطة المختلفة التي يتكون منها أي مشروع توضح علاقات التتابع والتداخل الفنية بين تلك الأنشطة • وقد بدأ التمثيل البياني لشبكات الأعمال بما يعرف بخرائط جانت Gantt Chart نسبة إلى هنري جانت وذلك أثناء الحرب العالمية الأولى لجدولة عمليات الإنتاج •

ومع تطور الحاسبات الآلية ظهرت أساليب حديثة لجدولة الإنتاج ، وتعتبر نماذج شبكات المسار الحرج CPM (Critical Path Method)

وشبكات بيرت PERT (Project Evaluation and Review Technique) من أهم الأساليب الحديثة في هذا المجال ، وقد تم ابتكار هذين الأسلوبين في نفس الوقت تقريباً ولكن بشكل مستقل ٠

فأسلوب المسار الحرج تم ابتكاره على يد مجموعة من الباحثين بشركة دي بونت للكيماويات في عام 1956 ، وفي عام 1957 أنضم إليهم مجموعة من الباحثين من شركة ريمنجتون راند للتطبيقات ٠ وقد بدأ استخدام هذا الأسلوب في تخطيط وجدولة العمليات الإنشائية ثم استخدم بعد ذلك في عمليات الصيانة و الصناعات البتروكيماوية ٠

أما أسلوب بيرت فقد تم ابتكاره في عام 1958 على يد مجموعة من الباحثين في البحرية الأمريكية لتطوير برنامج إنتاج صواريخ بولاريس حيث تتسم أنشطة هذا المشروع بدرجة عالية من عدم التأكد مما أدى إلى استخدام بعض التقديرات الاحتمالية ، ثم شاع استخدام أسلوب بيرت بعد ذلك ليشمل أبحاث الفضاء ونظم التسليح وبرامج الطاقة النووية ٠

وبمرور الوقت تعددت تطبيقات نماذج شبكات المسار الحرج وشبكات بيرت وتداخلت لدرجة أن الأسلوبين أصبحا كما لو كانا أسلوباً واحداً ٠

وتستخدم نماذج شبكات الأعمال (نموذج المسار الحرج ونموذج بيرت) في تحقيق الأهداف التالية :

١ - عملية التخطيط وتحقيق الرقابة على تنفيذ المشروعات وأيضا إمكانية تعديل الخطط وتحقيق الرقابة على إنجاز المستجدات أثناء العمل مما يحقق المرونة الكافية أثناء التنفيذ ٠

٢ - تحقيق أهداف المشروع في أقل وقت ممكن ورسم خريطة لأزمنة تنفيذ المشروع وتحديد الفائض الزمني لها وتكلفة تنفيذها •

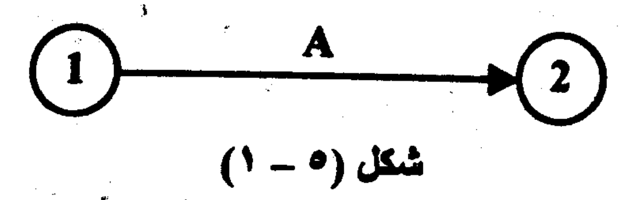
٣ - تساعد في إعداد التقارير الدورية لتنفيذ المشروع على أساس موضوعي ومراجعة وتعديل تلك التقارير إذا دعت الضرورة •

٤ - تحديد الأنشطة الأكثر حرجية أثناء التنفيذ للمشروع وإعطاء هذه الأنشطة أهمية خاصة أثناء التنفيذ لضمان عدم تأخير تنفيذ المشروع •

بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية :

١ - النشاط Activity

هو الأداء أو التنفيذ الفعلي للعمل ، وهو عملية توصيف فنية تشير إلى وحدات محتوى الأعمال في المشروع ، ويستغرق النشاط فترة زمنية وموارد مادية للتنفيذ تختلف من نشاط لآخر ، ويعبر عن النشاط في شبكة الأعمال بسهم ويرمز له إما بحرف أو برقمي البداية والنهاية كما يلي :



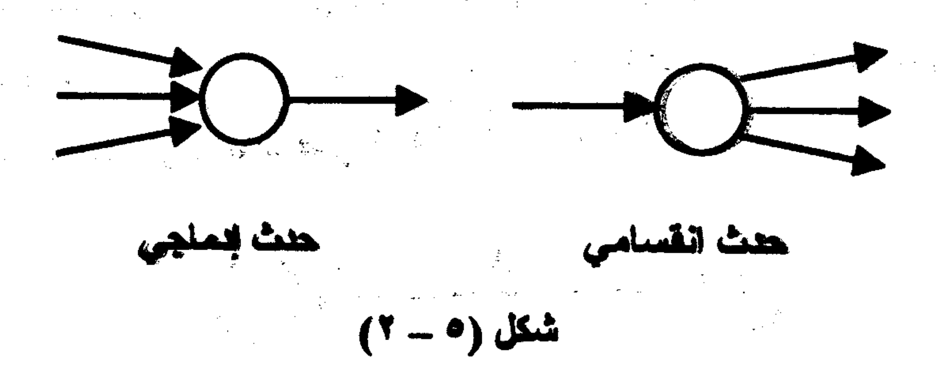
شكل (٥ – ١)

فإما أن نقول النشاط A أو النشاط (2 - 1) ، ويجب ملاحظة أن طول السهم المعبر عن النشاط وشكله واتجاهه لا علاقة له بحجم النشاط • وعند تقدير زمن تنفيذ النشاط يمكن استخدام أي وحدات زمنية (ساعة – يوم – أسبوع – ••••) ولكن يجب أن تكون هذه الوحدات متجانسة على مستوى أنشطة المشروع ككل •

١ - الحدث Event

يمثل الحدث بداية أو نهاية نشاط معين ، فالحدث هو نقطة زمنية محددة وبالتالي فهو لا يستغرق وقت أو موارد عند التنفيذ ، ويعبر عن الحدث في شبكات الأعمال عادة بدائرة تحمل رقماً ، والحدث في بداية النشاط يسمى حدث البداية للنشاط والحدث في نهاية النشاط يسمى حدث النهاية للنشاط ، ففي شكل (٥ – ١) نلاحظ أن الحدث (1) يمثل حدث البداية للنشاط A والحدث (2) يمثل حدث النهاية لنفس النشاط .

والحدث الذي يمثل نقطة النهاية لأكثر من نشاط في نفس الوقت يسمى حدث إدماجي ، أما الحدث الذي يمثل نقطة البداية لأكثر من نشاط في نفس الوقت يسمى حدث انقسامي كما يتضح من شكل (٥ – ٢) :



شكل (٥ – ٢)

٣ - المسار Path

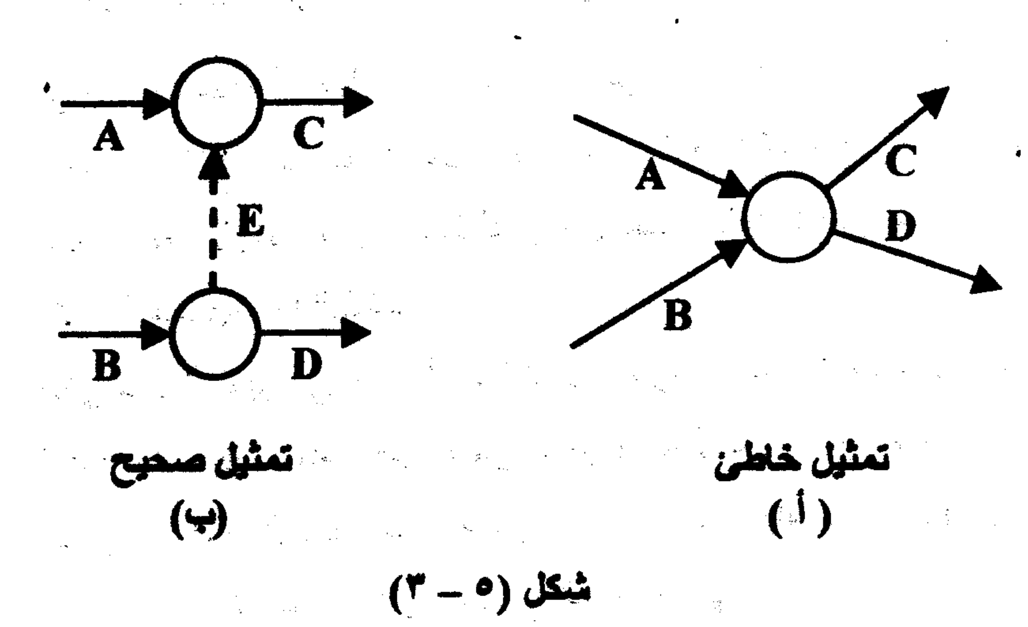
المسار هو مجموعة من الأنشطة المتصلة من حدث البداية بشبكة الأعمال إلى حدث النهاية أو إلى أي حدث آخر بالشبكة .

٤ - النشاط الوهمي Dummy Activity

هو نشاط غير حقيقي بمعنى أنه ليس موجود في الواقع الفعلي وبالتالي فهو لا يحتاج إلي وقت أو موارد لتنفيذه ، ويمثل عادة في شبكة الأعمال بس...

متقطع . ويتم إدخال النشاط الوهمي في الحالات التي تتعدد فيها الأنشطة بين حدثين متتاليين ، إذ لا يسمح في شبكات الأعمال باستخدام أسهم متوازية بين الأحداث أو أن يمثل السهم أكثر من نشاط حتى يمكن الاحتفاظ بمسارات محددة لشبكة الأعمال ، ولتوضيح هذه النقطة دعنا نأخذ المثال التالي :

بفرض أن النشاط C يعتمد في بدايته على الانتهاء من النشاطين A ، B وأن النشاط D يعتمد على الانتهاء من النشاط B فقط ، فتمثيل ذلك بالشكل (٥ ـ ٣ أ) يعد تمثيلاً خاطئاً ، أما التمثيل الصحيح فيقتضي إدخال النشاط الوهمي E كما في الشكل (٥ ـ ٣ ب) :



شكل (٥ ـ ٣)

٥ - شبكة الاعمال Network

شبكة الأعمال هي تمثيل بياني للعلاقات المتتابعة والمتداخلة بين الأنشطة والأحداث اللازمة حسب تسلسلها العام وتسمى الشبكات أحياناً بشبكات الأسهم .

بناء شبكات الأعمال

يتم أولا تجزئة المشروع إلى مجموعة من الأنشطة ويتحدد أيضاً حدثي البداية والنهاية للمشروع ككل ، ويتم بعد ذلك تحديد علاقات التتابع والتداخل بين الأنشطة في تسلسل منطقي وفقاً للمتطلبات الفنية للمشروع ، وهذه النقطة تقتضي الإجابة على التساؤلات التالية بالنسبة لكل نشاط بشبكة الأعمال :

- ما هي الأنشطة التي يجب الانتهاء منها قبل بداية هذا النشاط ؟
- ما هي الأنشطة التي تتبع أو تلي هذا النشاط ؟
- ما هي الأنشطة التي سوف تنفذ في نفس الوقت مع هذا النشاط ؟

ومن رسم شبكة الأعمال ينبغي مراعاة القواعد التالية :

أ - لا يمكن تحقق حدث معين قبل الانتهاء من كافة الأنشطة السابقة لهذا الحدث ، كما لا يمكن بداية نشاط معين قبل تحقق الأحداث التي تنهي جميع الأنشطة السابقة لهذا النشاط ٠

ب - ينبغي عدم تصوير أي حدث أو نشاط سوى مرة واحدة فقط ، كما أن السهم الواحد الدال على نشاط معين ينبغي ألا يربط سوى بين حدثين فقط ٠

جـ - ينبغي أن تكون الأسهم المعبرة عن الأنشطة في اتجاه واحد من (اليسار إلى اليمين) ولا يسمح بالارتداد في الاتجاه العكسي ٠

د - ينبغي أن تكون الأسهم المعبرة عن الأنشطة ممثلة بخطوط مستقيمة ولا يسمح بأن تأخذ شكل منحنى ٠

هـ - في حالة اعتماد أكثر من حدث على الانتهاء من نشاط معين ينبغي استخدام نشاط وهمي للدلالة على الترابط المتعدد بين الأنشطة حتى يتوفر لكل نشاط مساره المستقل بين حدثين محددين ٠

و - ينبغي ترقيم الأحداث بشكل يعكس تدفق مسار الأنشطة وفقاً للطبيعة الفنية للمشروع ، ويتم ذلك وفقاً للخطوات التالية :

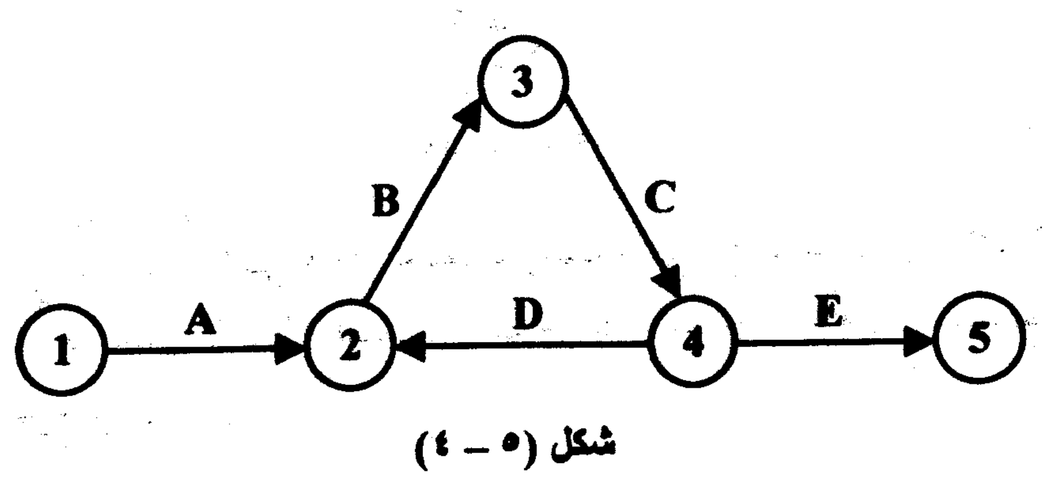
١ - فحدث البداية للمشروع الذي تخرج منه الأسهم ولا يدخل فيه أي سهم يعطي الرقم (1) ٠

٢ - بحذف كافة الأسهم الخارجة من الحدث (1) فإن هذا سوف يخلق بعض الأحداث المبدئية (أو على الأقل حدث واحد) فيتم ترقيم هذه الأحداث بالأرقام (2) ، (3) ، (4) ، ٠٠٠٠٠ ٠

٣ - يتم تكرار الخطوة الثانية لترقيم الأحداث بالأرقام التالية حتى نصل إلى حدث النهاية للمشروع وهو الحدث الذي تدخل فيه الأسهم ولا يخرج منه أي سهم ويرقم بالرقم النهائي ٠

٦ - الدائرية Looping

ينشأ موقف الدائرية – في بعض الأحيان – في شبكات الأعمال وذلك بسبب التمثيل الخاطئ لتتابع الأنشطة بالشبكة حيث لا يتقدم مسار الأنشطة بل يدور حول نفسه في دوامة متصلة ٠ ففي شكل (٥ – ٤) نجد أن الأنشطة B ، C ، D تشكل فيما بينها حلقة دائرية ٠



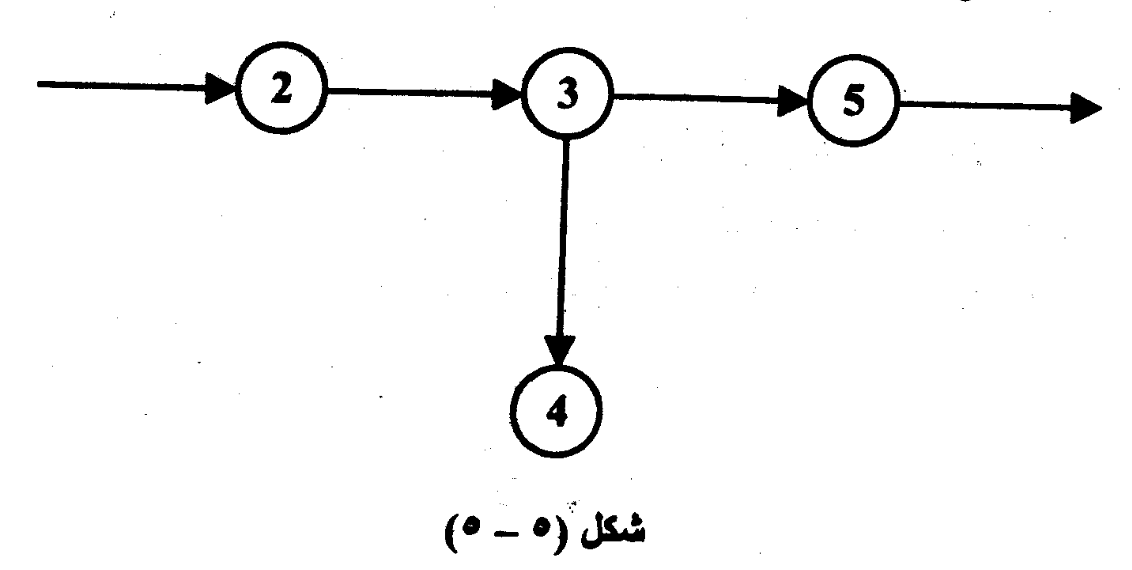
شكل (٥ – ٤)

إذ لا يمكن بدء النشاط B دون الانتهاء من النشاطين A ، D والنشاط D يعتمد بدوره على النشاط C والنشاط C يتطلب الانتهاء من النشاط B ، وهكذا نجد أن مسار الأنشطة لا يتقدم وإنما يدور في حلقة متصلة ٠

ويمكن تجنب حدوث دوران المسار حول نفسه وذلك بإعادة تحديد العلاقات بين الأنشطة تمهيداً لإعادة ترتيبها وترقيمها في تسلسل منطقي ٠

٧ - التعليق Dangling

ينشأ هذا الموقف عندما يكون هناك بعض الأنشطة بشبكة الأعمال بخلاف النشاط (الأنشطة) النهائية ليس لها أنشطة تالية ، ذلك أن مسار شبكة الأعمال سوف يعلق عند نقطة معينة ولا يستطيع التقدم كما في شكل (٥ – ٥) ٠



شكل (٥ – ٥)

ويمكن تلافي هذا الموقف بمراعاة أن كل الأحداث بشبكة الأعمال (بخلاف حدثي البداية والنهاية) يجب أن يكون لها على الأقل مدخل واحد ومخرج واحد ٠

(٥-٢-١) اسلوب المسار الحرج (CPM)

يعتبر أسلوب المسار الحرج أحد أساليب شبكات الأعمال التي تركز على الأنشطة الأساسية لأداء المشروع ، ويستخدم هذا الأسلوب في حالة المشروعات التي يمكن تقدير وقت تنفيذ أنشطتها بشكل محكم ودقيق بعيداً عن حالات عدم التأكد ٠

ويوجد بعض المصطلحات والمفاهيم الخاصة بنموذج المسار الحرج نذكرها في الجزء التالي :

١ - الوقت المبكر Earliest Time

ينقسم الوقت المبكر للنشاط إلى قسمين أساسيين هما :

أ - **وقت البدء المبكر للنشاط :** هو أول وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط بعد الانتهاء من كافة الأنشطة السابقة بفرض بدايتها أيضاً في الوقت المبكر ، وبالتالي فإن وقت البدء المبكر للنشاط الأول (عند حدث البداية) يساوي صفر دائماً ٠

ب - **وقت الانتهاء المبكر للنشاط :** هو وقت البدء المبكر للنشاط مضافاً إليه الوقت المقدر لتنفيذ هذا النشاط ٠ ويكون وقت الانتهاء المبكر لآخر نشاط بالشبكة (عند حدث النهاية) يعبر عن الوقت الإجمالي اللازم لتنفيذ المشروع ككل ٠

٢ - الوقت المتأخر Latest Time

ينقسم الوقت المتأخر للنشاط أيضاً إلى قسمين أساسيين هما :

أ - **وقت البدء المتأخر للنشاط :** هو آخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط بحيث يتم أداؤه دون تأخير في تنفيذ المشروع عن الوقت المبكر للحدث النهائي ، ويتم حساب وقت البدء المتأخر للنشاط وذلك بطرح الوقت المقدر لتنفيذ النشاط من وقت الانتهاء المتأخر لذلك النشاط .

ب - **وقت الانتهاء المتأخر للنشاط :** هو آخر وقت يمكن أن ينتهي فيه النشاط ، فالوقت المتأخر للانتهاء من النشاط الأخير يشير إلى الوقت الإجمالي اللازم لتنفيذ المشروع ككل .

٣ - المسار الحرج Critical Path

المسار الحرج هو أطول مسارات الشبكة زمناً وهو يتكون من مجموعة من الأنشطة الحرجة من حدث البداية إلى حدث النهاية ، وقد تشتمل شبكة الأعمال على أكثر من مسار حرج وسيكون لهم - بالطبع- نفس الطول . وتحديد المسار الحرج يتطلب القيام بنوعين من الحسابات وهما : الحسابات الأمامية والحسابات الخلفية .

أ - الحسابات الأمامية Forward Computations

تهتم الحسابات الأمامية بحساب الوقت المبكر للأحداث بالشبكة ، وتبدأ الحسابات الأمامية بحدث البداية والذي يمثل نقطة بداية المشروع بزمن يساوي صفر ثم نتحرك بعد ذلك إلى الحدث التالي في التتابع ونحسب الوقت المبكر للوصول إليه ويستمر التحرك للأمام حتى نصل إلى حدث النهاية بالشبكة والذي يمثل نقطة نهاية المشروع ، فإذا اعتبرنا النشاط (i - j) وفرضنا أن :

ES_i : هو وقت البداية المبكرة Earliest Start Time لحدث البداية (i)

وقت البداية المبكرة لحدث النهاية (j) هو : ES_j

الزمن المقدر لإنجاز النشاط (i - j) هو : t_{ij}

فيكون :

- وقت البداية المبكرة لحدث النهاية (j) هو :

$$ES_j = \max(ES_i + t_{ij})$$

وذلك لجميع الأنشطة المؤدية إلى الحدث (j) .

حيث : $ES_1 = 0$.

ب - الحسابات الخلفية **Backward Computations**

تهتم الحسابات الخلفية بحساب الوقت المتأخر للأحداث بالشبكة أي النهاية المتأخرة Latest Finish Time لجميع الأنشطة بالشبكة بحدث النهاية وتحدد له وقتاً مساوياً لوقت الإنجاز المبكر لهذا الحدث (والذي يساوي وقت إنجاز المشروع ككل) ، فإذا كان j = n هو الحدث النهائي بشبكة الأعمال ، فإن المساواة :

$$LF_{in} = LS_n = ES_n$$

تشكل بداية الحسابات للارتداد في الاتجاه العكسي حتى نصل إلى الحدث الأول (أي نقطة بداية المشروع) في شبكة الأعمال ، فإذا فرضنا أن :

وقت البداية المتأخرة Latest Start Time لحدث البداية (i) هو : LS_i

وقت البداية المتأخرة لحدث النهاية (j) هو : LS_j

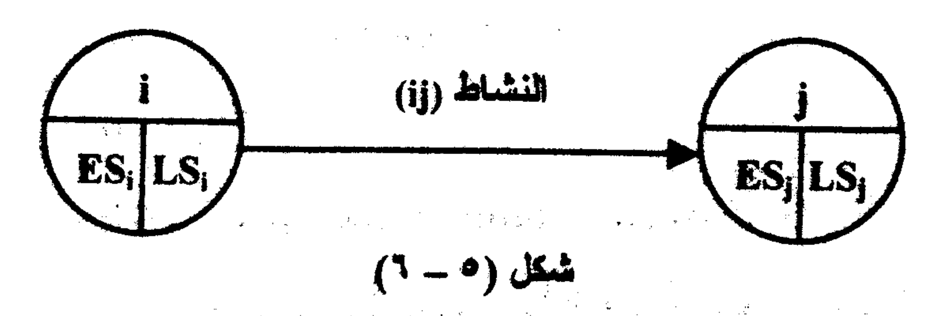
فيكون :

وقت البداية المتأخرة لحدث البداية (i) هو :

$$LS_i = \min \ (LS_j - t_{ij})$$

وذلك لجميع الأنشطة المتفرعة (أي الخارجة) من الحدث (i) ·

ويمكن تمثيل ES_i ، ES_j ، LS_i ، LS_j للنشاط (i - j) بيانياً كما في شكل (٥ – ٦) :



شكل (٥ – ٦)

بعد الانتهاء من الحسابات الأمامية والخلفية بشبكة الأعمال يمكن تحديد الأنشطة الحرجة بالشبكة ، ويكون النشاط حرجاً إذا حقق الشروط الثلاثة الآتية :

أ - وقت البداية المبكرة = وقت البداية المتأخرة وذلك لحدث البداية (i) ، أي أن :

$$ES_i = LS_i$$

ب - وقت البداية المبكرة = وقت البداية المتأخرة وذلك لحدث النهاية (j) ، أي أن :

$$ES_j = LS_j$$

جـ - الفرق بين الوقتين في (أ) ، (ب) يساوي الوقت المقدر لتنفيذ النشاط ، أي أن :

$$ES_j - ES_i = LS_j - LS_i = t_{ij}$$

ومجموعة الأنشطة الحرجة تكون المسار الحرج بشبكة الأعمال من حدث البداية إلى حدث النهاية ، وهو – كما أسلفنا – أطول مسارات الشبكة زمناً ، وطول المسار الحرج يساوي وقت الإنجاز المبكر (أو المتأخر) لحدث النهاية بالشبكة وهو يساوي الزمن الإجمالي اللازم لإنجاز المشروع ككل .

٤ - الوقت الراكد Float Time

إذا كان الوقت المبكر يمثل الحد الأدنى للبدء أو للانتهاء من النشاط والوقت المتأخر يمثل الحد الأقصى للبدء أو للانتهاء من النشاط بحيث يمكن تنفيذه دون أن يتأثر الوقت الإجمالي للمشروع ، فإن الفرق بين الوقتين يشير إلى الوقت الراكد الذي يمكن للنشاط أن يتأخر في حدوده دون أن يؤثر ذلك على الجدول الزمني لتنفيذ المشروع .

وقبل أن نشرح أسلوب حساب الوقت الراكد ، فإنه يجب أن نعرف بعض الأزمنة المقترنة بكل نشاط من أنشطة الشبكة ، هذه الأزمنة هي :

زمن البداية المتأخرة للنشاط (i - j) LS_{ij} (Latest Start Time)

ويمكن حسابه من العلاقة :

$$LS_{ij} = LS_j - t_{ij}$$

زمن النهاية المبكرة للنشاط (i - j) EF_{ij} (Earliest Finish Time)

ويمكن حسابه من العلاقة :

$$EF_{ij} = ES_i + t_{ij}$$

ويوجد ثلاثة أنواع من الوقت الراكد هي : الإجمالي والحر والمستقل ، وسوف نتناول كل منها بالتفصيل :

أ - الوقت الراكد الإجمالي (Total Float) TF

الوقت الراكد الإجمالي هو الفرق بين الحد الأقصى المتاح زمنياً لأداء النشاط وزمن إنجاز النشاط ، والحد الأقصى المتاح زمنياً لأداء النشاط يمثل الفرق بين وقت البداية المبكرة ووقت النهاية المتأخرة للنشاط ، أي أن :

الوقت الأقصى المتاح للنشاط = وقت الانتهاء المتأخر للنشاط
– وقت البدء المبكر للنشاط

ومن ثم فإن :

الوقت الراكد الإجمالي للنشاط = الوقت الأقصى المتاح للنشاط
– الوقت المقدر لتنفيذ النشاط

= وقت الانتهاء المتأخر للنشاط – وقت البدء المبكر للنشاط – الوقت المقدر لتنفيذ النشاط

وحيث أن :

وقت الانتهاء المتأخر للنشاط – الوقت المقدر لتنفيذ النشاط = وقت البدء المتأخر للنشاط

وبالتالي فإن :

الوقت الراكد الإجمالي للنشاط (i - j) = وقت البداية المتأخرة للنشاط (i - j) – وقت البداية المبكرة للنشاط (i - j) .

أي أن :

$$TF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij}$$
$$= LS_{ij} - ES_{i}$$

بالمثل ، يمكن حساب الوقت الراكد الإجمالي للنشاط (i - j) باستخدام العلاقة التالية :

الوقت الراكد الإجمالي للنشاط (i - j) = وقت النهاية المتأخرة للنشاط (i - j) – وقت النهاية المبكرة للنشاط (i - j) ·

أي أن :

$$TF_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij}$$
$$= LS_{j} - EF_{ij}$$

ويلاحظ أن الوقت الراكد الإجمالي للأنشطة الحرجة – أي تلك التي تقع على المسار الحرج – يساوي صفر ·

ب - الوقت الراكد الحر FF (Free Float)

الوقت الراكد الحر هو الوقت الفائض الذي يتاح للنشاط عندما يتم إنجاز كافة الأنشطة السابقة عليه واللاحقة له في الوقت المبكر ، وهو يشير إلى الوقت الذي يمكن للنشاط أن يتأخر به أثناء التنفيذ دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير الأنشطة اللاحقة له ·

ويتم حساب الوقت الراكد الحر للنشاط (i - j) كما يلي :

الوقت الراكد الحر للنشاط = وقت البدء المبكر للنشاط التالي – وقت البدء المبكر للنشاط الحالي – الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي

= وقت البدء المبكر للنشاط التالي – (وقت البدء المبكر للنشاط الحالي

+ الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي)

= وقت البدء المبكر للنشاط التالي – وقت الانتهاء المبكر للنشاط الحالي

وبالتالي فإن :

$$FF_{ij} = ES_j - (ES_i + t_{ij}) = ES_j - EF_{ij}$$

جـ - الوقت الراكد المستقل IF (Independent Float)

الوقت الراكد المستقل هو الوقت الفائض الذي يتاح للنشاط عندما يتم كافة الأنشطة السابقة عليه في الوقت المتأخر وكافة الأنشطة اللاحقة له في الوقت المبكر ، وهو يعني الفائض الزمني الذي يمكن للنشاط أن يتأخر به دون أن يؤثر ذلك على الأوقات الراكدة الأخرى للأنشطة اللاحقة لهذا النشاط .

ويتم حساب الوقت الراكد المستقل للنشاط (i - j) كما يلي :

الوقت الراكد المستقل للنشاط = وقت البداية المبكرة للنشاط التالي – وقت النهاية المتأخرة للنشاط السابق – الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي

أي أن :

$$IF_{ij} = ES_j - LS_i - t_{ij}$$

من العرض السابق نلاحظ أنه إذا امتد زمن تنفيذ النشاط ليمتص الوقت الراكد الإجمالي فإنه يصبح نشاطا حرجا ، وإذا امتد زمن تنفيذ النشاط ليمتص الوقت الراكد الحر فإن ذلك لن يؤثر على الوقت المتاح للأنشطة اللاحقة له ولكنه يؤثر على الوقت المتاح للأنشطة السابقة عليه ، أما استنفاذ الوقت الراكد المستقل

للنشاط فلن يؤثر على الوقت المتاح لأي من الأنشطة السابقة عليه أو اللاحقة له ، وسوف يقتصر تأثيره فقط على الوقت المتاح للنشاط الحالي •

ويمكن تحديد العلاقة بين المستويات الثلاثة للوقت الراكد للنشاط كما يلي :

- إذا كان الوقت الراكد الإجمالي لنشاط ما يساوي صفر ، فإن الوقت الراكد الحر والوقت الراكد المستقل للنشاط ينبغي أن يكونا مساويين أصفار ، أو في مستوى سالب •
- إذا كان الوقت الراكد الحر لنشاط ما يساوي صفر ، فإن الوقت الراكد الإجمالي قد يساوي أو لا يساوي صفر ، بينما يكون الوقت الراكد المستقل مساوياً للصفر أو في مستوى سالب •
- إذا كان الوقت الراكد المستقل لنشاط ما يساوي صفر ، فإن الوقت الراكد الإجمالي والوقت الراكد الحر للنشاط يمكن أن يأخذ كل منهما أي قيمة صفرية أو غير صفرية •

ومن ثم فإن العلاقة بين المستويات الثلاث للوقت الراكد للنشاط تكون على الصورة التالية :

الوقت الراكد الإجمالي أكبر من أو يساوي الوقت الراكد الحر ، والوقت الراكد الحر أكبر من أو يساوي الوقت الراكد المستقل ، أي أن :

$$TF_{ij} \geq FF_{ij} \geq IF_{ij}$$

وتحديد الوقت الراكد بمستوياته المختلفة يفيد في تحديد مدى مرونة جدولة تنفيذ المشروع زمنياً والموارد التي ينبغي استخدامها في كل نشاط ويفيد

أيضاً في بيان مدى إمكانية تحويل جزء من الموارد المخصصة للأنشطة غير الحرجة وتوجيهها إلى الأنشطة الحرجة مما يمكن من تخفيض وقت إنجاز تلك الأنشطة ويؤدي ذلك بالتبعية إلى تخفيض وقت وتكلفة تنفيذ المشروع ككل .

الوقت الراكد السالب (Negative Float) NF

توجد بعض الحالات التي يكون فيها للوقت الراكد بأي من مستوياته الثلاث قيماً سالبة نوجزها فيما يلي :

١ - إذا كان الوقت المخطط لتنفيذ المشروع يساوي الوقت المبكر لتنفيذ الأنشطة الحرجة (أي مساوياً لطول المسار الحرج) ، ففي هذه الحالة فإن الوقت الراكد الإجمالي لكافة الأنشطة الحرجة سيكون مساوياً للصفر . وفي هذه الحالة فإن الوقت الراكد المستقل يمكن أن يأخذ قيماً سالبة وهو موقف يماثل تماماً مساواته بالصفر ، ويمكن وضع صفر بدلاً من القيمة السالبة للوقت الراكد المستقل دون أن يؤثر ذلك على معالجة المشروع .

٢ - إذا كان الوقت المخطط لتنفيذ المشروع يزيد عن الوقت المبكر لتنفيذ المسار الحرج ، فإن الوقت الراكد الإجمالي سوف يكون موجداً حتى بالنسبة للأنشطة الحرجة وهو يشير حينئذ إلى حدود التأخير التي يمكن للأنشطة أن تتأخر بها مع المحافظة على تحقيق الوقت المخطط للمشروع .

٣ - إذا كان الوقت المخطط لتنفيذ المشروع يقل عن الوقت المبكر لتنفيذ الأنشطة الحرجة ، فإن الوقت الراكد الإجمالي سوف يكون سالباً للأنشطة الحرجة وربما لأنشطة أخرى غير حرجة ، هذه القيم السالبة للوقت الراكد الإجمالي للأنشطة الحرجة تشير إلى الوقت اللازم تخفيضه حتى يمكن تحقيق الهدف المخطط .

مثال (١) :

الجدول التالي يبين قائمة بالأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات الإنشائية وعلاقاتها الفنية والزمن اللازم لتنفيذها بالشهور :

النشاط السابق	زمن تنفيذ النشاط (بالشهور)	النشاط
لا يوجد	3	A
A	3	B
A	2	C
B	0	D
B	3	E
B	2	F
B , C	7	G
B , C	6	H
E , G	6	I
F	9	J
H	4	K

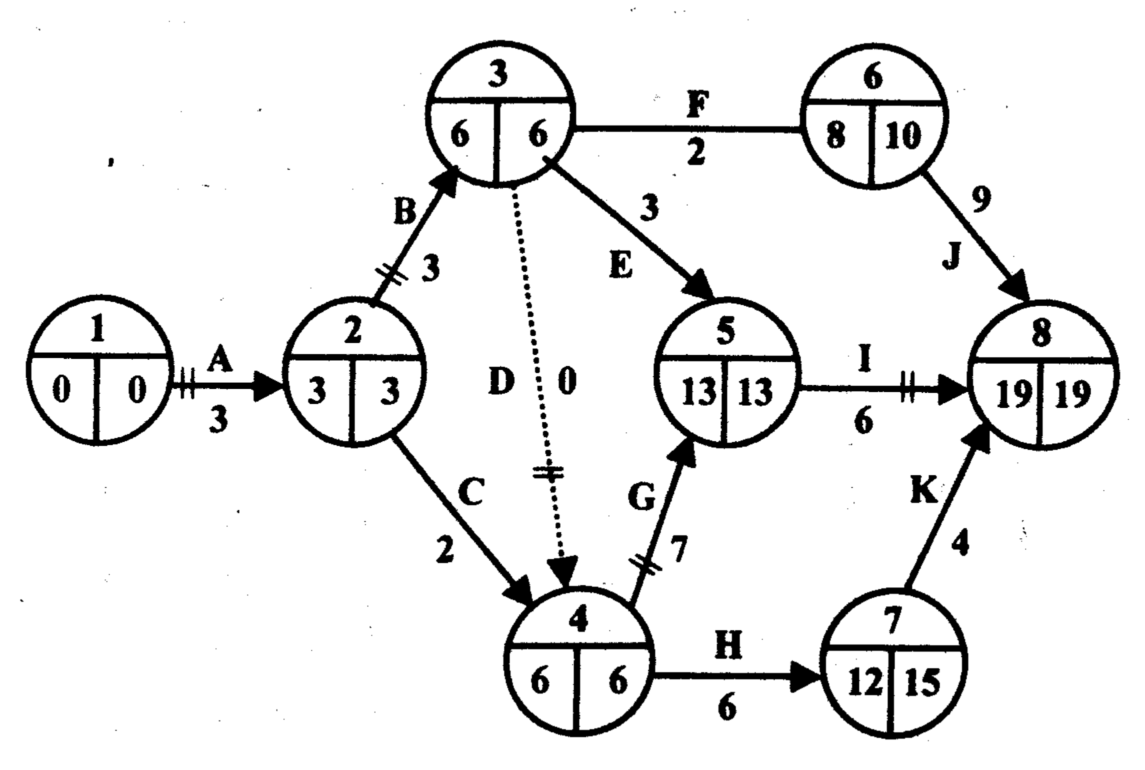
المطلوب :

١ - رسم شبكة الأعمال للمشروع وتحديد المسار الحرج وكذا الزمن المتوقع لإنجاز المشروع ككل ٠

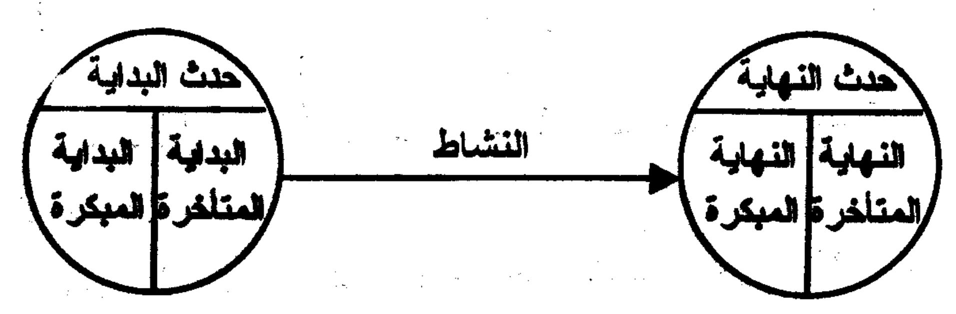
٢ - تحديد الجدول (الخريطة) الزمني (الزمنية) وحساب الوقت الراكد بمستوياته الثلاث : الإجمالي والحر والمستقل لأنشطة المشروع ٠

الحـل :

١ - يتم رسم شبكة الأعمال للمشروع على النحو التالي :



مع ملاحظة أن :



لتحديد المسار الحرج على شبكة الأعمال يلزم أولاً تحديد الأنشطة الحرجة ، ولمعرفة ما إذا كان النشاط حرجاً أم لا يتم التحقق من مدى توافر شروط الحرجية من عدمه لكل نشاط .

فعلى سبيل المثال ، النشاط B أو (3 - 2) يلاحظ أن :

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر (لحدث البداية رقم 2) = 3
أي أن :

$$ES_2 = LS_2 = 3$$

فيكون الشرط الأول متحققاً •

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر (لحدث النهاية رقم 3) = 6
أي أن :

$$ES_3 = LS_3 = 6$$

فيكون الشرط الثاني متحققاً •

- الفرق بين الوقتين يساوي 3 = 3 - 6 وهو يساوي t_{23} أي الزمن المقدر لتنفيذ النشاط (3 - 2) •
فيكون الشرط الثالث متحققاً •

ومن ثم يكون النشاط B أو (3 - 2) نشاطاً حرجاً •

أما النشاط J أو (8 - 6) فيلاحظ بالنسبة له ما يلي :

- وقت الإنجاز المبكر = 8 ≠ وقت الإنجاز المتأخر = 10 (بالنسبة لحدث البداية رقم 6) •
أي أن :

$$ES_6 = 8 \neq LS_6 = 10$$

فيكون الشرط الأول غير متحقق وبالتالي يكون النشاط J غير حرج •

كذلك بالنسبة للنشاط E أو (5 - 3) – على سبيل المثال – يلاحظ ما يلي :

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر (لحدث البداية رقم 3) = 6 ، أي أن :

$$ES_3 = LS_3 = 6$$

فيكون الشرط الأول متحققاً ٠

- وقت الإنجاز المبكر = وقت الإنجاز المتأخر (لحدث النهاية رقم 5) = 13 ، أي أن :

$$ES_5 = LS_5 = 13$$

فيكون الشرط الثاني متحققاً ٠

- الفرق بين الوقتين يساوي 7 = 6 - 13 وهو لا يساوي الزمن المقدر لتنفيذ النشاط ، حيث : $t_{35} = 3$

فيكون الشرط الثالث غير متحقق ٠

لذلك فإن النشاط E أو (5 - 3) يكون نشاطاً غير حرج ٠

وكما هو واضح من شبكة الأعمال فإن المسار الحرج يتكون من الأنشطة A ، B ، D ، G ، I أو الأنشطة (2 - 1) ، (3 - 2) ، (4 - 3) ، (5 - 4) ، (8 - 5) ، كما يلاحظ أن :

الزمن المتوقع لإنجاز المشروع ككل = طول المسار الحرج = 19 شهراً ٠

٢ - لتحديد الجدول الزمني والوقت الراكد الإجمالي والحر والمستقل لأنشطة المشروع يلزم تكوين الجدول التالي والذي نورد بخصوصه الملاحظات التالية :

أ - الوقت الراكد الإجمالي تم حسابه على أساس أنه يساوي ما يلي :

البداية المتأخرة للنشاط – البداية المبكرة للنشاط أي عمود (6) – عمود (4)

أو

النهاية المتأخرة للنشاط – النهاية المبكرة للنشاط أي عمود (7) – عمود (5)

فعلى سبيل المثال ، الوقت الراكد الإجمالي للنشاط E أو (5 - 3) يتم حسابه كما يلي :

$$TF_{35} = 10 - 6 = 13 - 9 = 4$$

ب - الوقت الراكد الحر للنشاط يتم حسابه – كما أوضحنا في التحليل السابق – على النحو التالي :

وقت البدء المبكر للنشاط التالي – (وقت البدء المبكر للنشاط الحالي + الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي) ٠

فعلى سبيل المثال ، يلاحظ أن :

الوقت الراكد الحر للنشاط C أو (4 - 2) يساوي :

$$FF_{24} = ES_4 - ES_2 - t_{24}$$

$$= 6 - 3 - 2 = 1$$

جـ - الوقت الراكد المستقل للنشاط يتم حسابه – كما أوضحنا في التحليل السابق – على أنه يساوي ما يلي :

وقت البدء المبكر للنشاط التالي – (وقت الانتهاء المتأخر للنشاط السابق + الوقت المقدر لتنفيذ النشاط الحالي) ٠

فعلى سبيل المثال ، يلاحظ أن :

الوقت الراكد المستقل للنشاط J أو (8 - 6) يساوي :

$$IF_{68} = ES_8 - LS_6 - t_{68}$$

$$= 19 - 10 - 9 = 0$$

الجدول الزمني لأنشطة المشروع

النشاط	مسار النشاط (i,j)	وقت تنفيذ النشاط (بالشهور) t_{ij}	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		الوقت الراكد			
			البداية ES_i	النهاية EF_{ij}	البداية LS_{ij}	النهاية LS_j	الإجمالي TF_{ij}	الحر FF_{ij}	المستقل IF_{ij}	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	
A	(1-2)	3	0	3	0	3	0	0	0	*
B	(2-3)	3	3	6	3	6	0	0	0	*
C	(2-4)	2	3	5	4	6	1	1	1	
D	(3-4)	0	6	6	6	6	0	0	0	*
E	(3-5)	3	6	9	10	13	4	4	4	
F	(3-6)	2	6	8	8	10	2	0	0	
G	(4-5)	7	6	13	6	13	0	0	0	*
H	(4-7)	6	6	12	9	15	3	0	0	
I	(5-8)	6	13	19	13	19	0	0	0	*
J	(6-8)	9	8	17	10	19	2	2	0	
K	(7-8)	4	12	16	15	19	3	3	0	

ملحوظة : * تعني الأنشطة الحرجة ٠

(٥-٢-٢) اسلوب بيرت (PERT)

يتفق أسلوب بيرت (PERT) مع أسلوب المسار الحرج (CPM) في كيفية بناء ورسم شبكة الأعمال للمشروع وفق القواعد التي سبق الإشارة إليها ، وأيضاً في كيفية إعداد الخريطة الزمنية لأنشطة المشروع ٠ إلا أن أسلوب بيرت يسمح بإدخال عنصر عدم التأكد عند تقدير الوقت اللازم لتنفيذ أنشطة المشروع ، فقد تكون بعض الأنشطة نادرة الحدوث أو غير مسبوقة مثل أنشطة الأبحاث والتطوير لمنتج معين وقد لا تتوافر البيانات الكافية عن بعض الأنشطة ، وقد يتم تنفيذ بعض الأنشطة في ظل ظروف غير مستقرة مثل عملية حصاد الأرز أثناء موسم الشتاء ٠ هذه الأنشطة يطلق عليها أحياناً " الأنشطة الاحتمالية " ، لذلك فهي تحتاج إلى أسلوب احتمالي عند تقدير وقت تنفيذها ٠

أولاً : *القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط*

أسلوب بيرت هو أسلوب احتمالي يحدد ثلاثة تقديرات مختلفة لوقت تنفيذ النشاط ، هذه التقديرات الثلاث هي كما يلي :

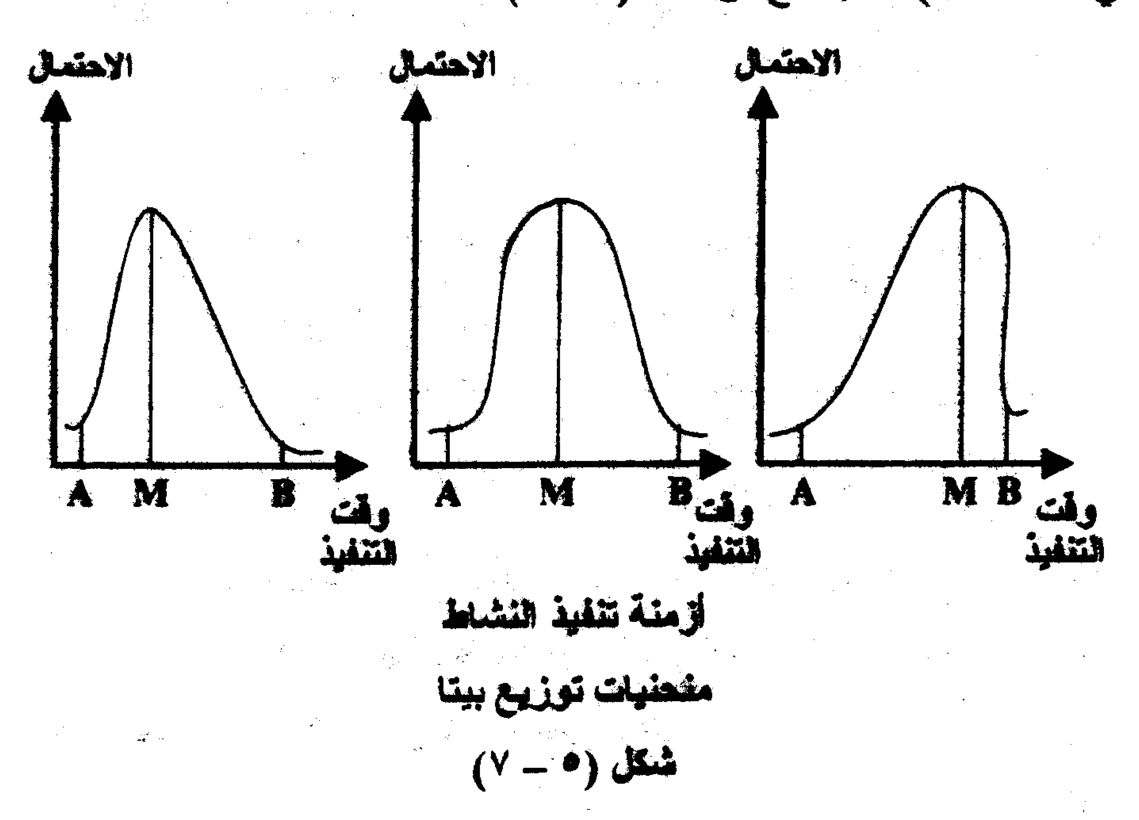
الوقت المتفائل : هو أقصر زمن ممكن لتنفيذ النشاط ، ويفترض توافر أفضل الشروط لإنجاز النشاط ، ويرمز له بالرمز A ٠

الوقت الأكثر احتمالاً : وهو الزمن الأكثر تواتراً لتنفيذ النشاط ، ويفترض تحقق الظروف الطبيعية لإنجاز النشاط ، ويرمز له بالرمز M ٠

الوقت المتشائم : وهو أطول زمن ممكن لتنفيذ النشاط ، ويفترض تحقق أردئ الظروف لإنجاز النشاط (مثل الإضرابات – الزلازل – الحروب – الفيضانات – ٠٠٠ الخ) ويرمز له بالرمز B ٠

ويتم الحصول على هذه التقديرات المختلفة لزمن تنفيذ النشاط عن طريق الأشخاص ذوي الخبرة مثل المهندسين أو المشرفين أو العمال المتخصصين في هذا المجال أو عن طريق مواقف مشابهة سابقة ٠

ويفترض أسلوب بيرت أن التقديرات المختلفة لوقت تنفيذ الأنشطة تعد متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيع بيتا Beta Distribution ، وما ذلك إلا لأن توزيع بيتا يعطي مرونة تتوقف على القيم النسبية لكل من A ، M ، B ، كما أن توزيع بيتا لا يشترط أن يكون متماثلاً دائماً بل يمكن أن يكون أيضاً ملتوياً جهة اليمين (أي التواء موجب) أو ملتويا جهة اليسار (أي التواء سالب) بعكس الحال في منحنى التوزيع الطبيعي والذي يكون متماثلاً دائماً ، كما أن منحنى توزيع بيتا له نقاط طرفيه دنيا (متمثلة في النقطة A) وقصوى (متمثلة في النقطة B) كما يتضح من شكل (٥ – ٧) ٠



أزمنة تنفيذ النشاط

منحنيات توزيع بيتا

شكل (٥ – ٧)

ومن الطبيعي أن يكون الزمن المتوقع لتنفيذ النشاط هو القيمة المتوقعة لتوزيع بيتا ، μ ، كما أن الانحراف المعياري لزمن تنفيذ النشاط هو الانحراف المعياري لتوزيع بيتا ، σ ، إلا أن أسلوب بيرت افترض صيغة تقريبية عند تقدير الزمن المتوقع لتنفيذ النشاط تعطي وزناً نسبياً أكبر للوقت الأكثر احتمالاً ، M ، يعادل ضعف الوزن النسبي للوقت المتفائل ، A ، والوقت المتشائم ، B ٠

فإذا رمزنا للوقت المتوقع لتنفيذ النشاط $(i - j)$ بالرمز t_{ij} ، فإن :

$$t_{ij} = \frac{\frac{A_{ij} + B_{ij}}{2} + 2M_{ij}}{3} = \frac{A_{ij} + 4M_{ij} + B_{ij}}{6}$$

وعند حساب الانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط فإن توزيع بيتا يفترض أن حوالي 98% من المساحة تحت منحنى التوزيع تنحصر بين ± 3 الانحراف المعياري ٠

فإذا رمزنا للانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط $(i - j)$ بالرمز σ_{ij} ، فإن :

$$\sigma_{ij} = \frac{B_{ij} - A_{ij}}{6}$$

بعد الحصول على الوقت المتوقع لتنفيذ أنشطة المشروع يتم بناء ورسم شبكة الأعمال وحساب الجدول الزمني وما يتضمنه من الأوقات المبكرة والمتأخرة لأحداث البداية والنهاية ، وأيضاً الوقت الراكد بمستوياته الثلاث لأنشطة المشروع تماماً بنفس الطريقة التي اتبعت في أسلوب المسار الحرج ٠

وكما هو واضح فإن أحد الفروق الأساسية بين أسلوب المسار الحرج وأسلوب بيرت هو أن تقديرات أوقات تنفيذ الأنشطة وفقاً لأسلوب المسار الحرج

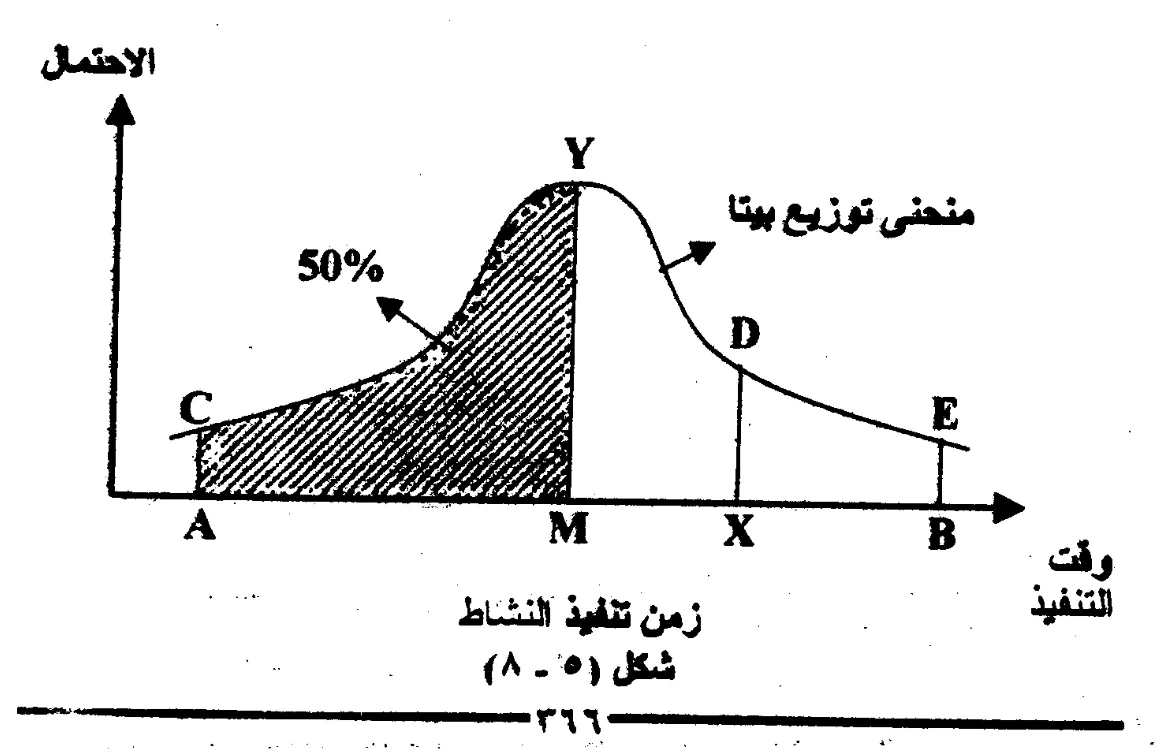
تكــون محــددة Deterministic ووفقــا لأســلوب بــيرت تكــون احتمالــية Probabilistic .

ثانياً : احتمال تنفيذ المشروع في تاريخ محدد على الأقل (أو على الأكثر)

بعد تحديد المسار الحرج وتصوير الجدول الزمني لأنشطة المشروع يبرز السؤال المهم التالي :

ما هو احتمال تنفيذ المشروع ككل (أو حدث معين منه) في أو قبل (بعد) تاريخ مستهدف معين ؟

للإجابة على هذا السؤال ، نلاحظ أولا أنه بخصوص الوقت المتوقع لتنفيذ النشاط والذي تم افتراض أنه متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا ، فإن احتمال تنفيذ النشاط في هذا الوقت المتوقع يساوي 50% . فإذا اعتبرنا منحنى توزيع بيتا للوقت المتوقع لتنفيذ النشاط ، فإن الخط الرأسي YM يقسم منحنى التوزيع إلى قسمين متساويين في المساحة كما يتضح من شكل (٥ – ٨) :

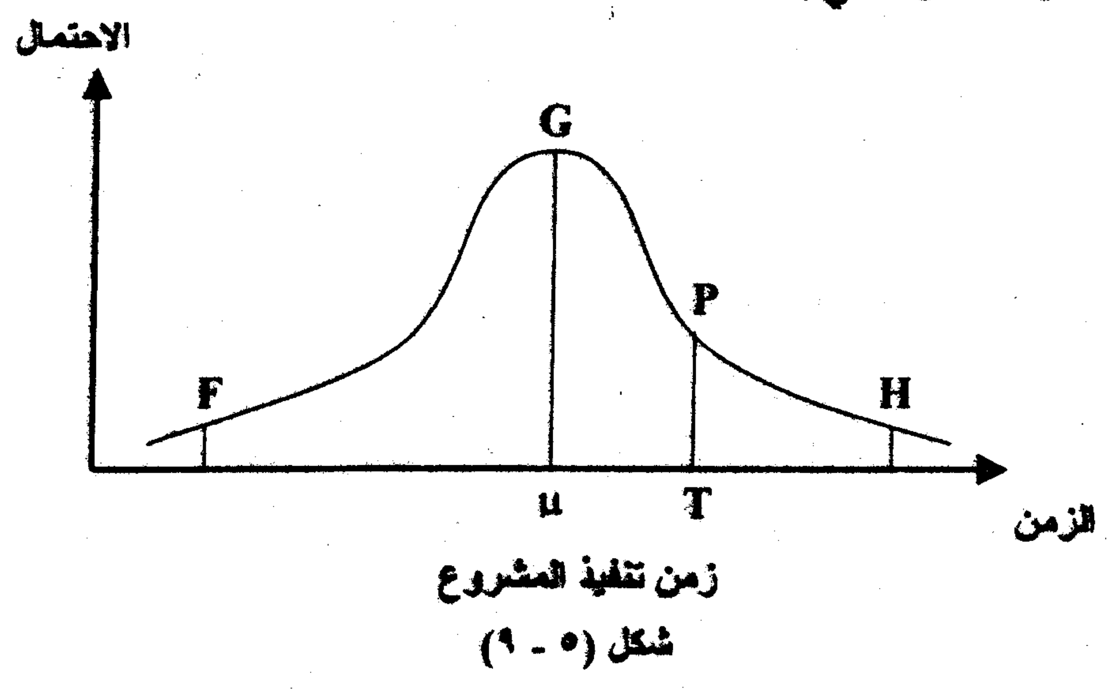


شكل (٥ - ٨)

لحساب احتمال تنفيذ النشاط في الزمن X على الأكثر ، فكما يتضح من الشكل السابق ، يتم ذلك كما يلي :

$$\text{احتمال تنفيذ النشاط في الزمن X على الأكثر} = \frac{\text{المساحة المحصورة أسفل CYD}}{\text{المساحة المحصورة أسفل CYE}}$$

وحيث أن المشروع يتكون – في الغالب – من مجموعة كبيرة من الأنشطة والتي تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ، ومن ثم فإن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع ككل سيكون بالطبع هو الآخر متغير عشوائي ولكنه لن يتبع توزيع بيتا ، وإنما وفقاً لنظرية النزعة المركزية Central Limit Theorem ، فإن الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع ككل سوف يتبع التوزيع الطبيعي والذي يأخذ الشكل المتماثل التالي :



زمن تنفيذ المشروع

شكل (٥ - ٩)

والوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي وهو μ ، في هذه الحالة عبارة عن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع ككل والذي يساوي – كما أسلفنا – طول المسار

الحرج بشبكة الأعمال ، كما أن الخط الرأسي عند هذه القيمة (وهو الخط $G\mu$) يقسم المساحة تحت منحنى التوزيع إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوي 0.5 .

أما الإنحراف المعياري لوقت تنفيذ المشروع ، ويرمز له بالرمز σ ، في هذه الحالة يحسب كما يلي :

الانحراف المعياري لوقت تنفيذ المشروع هو :

$$\sigma = \sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة بشبكة الأعمال}}$$

ويمكن حساب احتمال تنفيذ المشروع في وقت مستهدف ، T ، الذي يقابل النقطة P على المنحنى كما يلي :

$$\text{احتمال تنفيذ المشروع في الوقت } T \text{ على الأكثر} = \frac{\text{المساحة المحصورة أسفل } FGP}{\text{المساحة المحصورة أسفل } FGH}$$

ويمكن حساب هذا الاحتمال بواسطة تكامل دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي من نقطة البداية حتى النقطة T ، إلا أن ذلك يتطلب وقتاً وجهداً كبيرين ، كذلك يمكن حساب قيمة هذا الاحتمال باستخدام جدول المساحات ، وهذا الجدول يعطي المساحة تحت منحنى التوزيع بين الوسط الحسابي ، μ ، وأي قيمة أخرى محددة مثل T .

ونظراً لاختلاف قيم μ ، σ للتوزيعات الطبيعية المختلفة باختلاف المشروعات مما يترتب عليه ضرورة حساب جدول خاص لكل زوج من قيم μ ، σ المختلفة وهو أمر مستحيل . لذلك يلزم تحويل وقت تنفيذ المشروع

كمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي إلى المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري والذي نرمز له بالرمز Z ، كما يلي(*) :

$$Z = \frac{\text{الوقت المستهدف لتنفيذ المشروع} - \text{الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع}}{\sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة}}}$$

والمتغير العشوائي Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري يتميز بأن وسطه الحسابي يساوي الصفر وانحرافه المعياري يساوي الواحد الصحيح ، ويمكن استخدام جدول منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات المختلفة لتنفيذ المشروع في أي وقت مستهدف بسهولة ، ولبيان كيفية إستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات المختلفة دعنا نأخذ المثال التالي :

مثال (٢) :

إذا كان Z متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ، فباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد الاحتمالات الآتية :

(*) **نظرية النزعة المركزية :**

إذا كان x_1 ، x_2 ، ...... ، x_n مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة ، فإن المجموع الجبري لهذه المتغيرات وليكن Z حيث :

$$Z = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

سوف يتبع بشكل تقريبي التوزيع الطبيعي وذلك بزيادة قيمة n زيادة كبيرة ، أي عندما n تؤول إلى ∞ وذلك بغض النظر عن التوزيع الاحتمالي الأصلي للمتغيرات العشوائية x_i $(i = 1, 2, 3, ... , n)$.

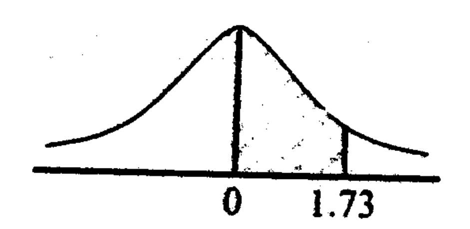
1. $P(0 \leq Z \leq 1.73)$
2. $P(Z \geq -0.86)$
3. $P(1 \leq Z \leq 2.35)$
4. $P(-1.34 \leq Z \leq 0.49)$
5. $P(Z \geq 0.41)$

حيث P اختصار لكلمة Probability وهي تعني احتمال .

الحـــل :

1. $P(0 \leq Z \leq 1.73)$

$= 0.4582.$



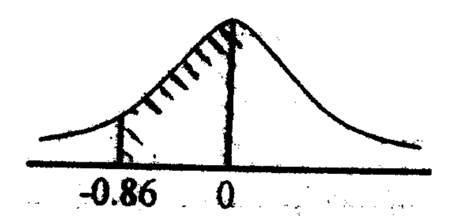
حيث ندخل الجدول وفق الصف 1.7 والعمود 0.03

2. $P(Z \geq -0.86)$

$= 0.5 + P(-0.86 \leq Z \leq 0)$

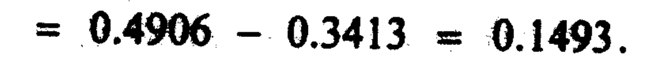
$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.86)$

$= 0.5 + 0.3051 = 0.8051.$

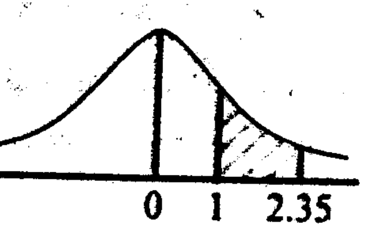


3. $P(1 \leq Z \leq 2.35)$

$= P(0 \leq Z \leq 2.35) - P(0 \leq Z \leq 1)$



$= 0.4906 - 0.3413 = 0.1493.$

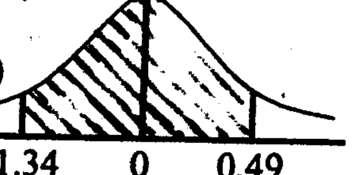


4. $P(-1.34 \leq Z \leq 0.49)$

$= P(-1.34 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.49)$

$= P(0 \leq Z \leq 1.34) + P(0 \leq Z \leq 0.49)$

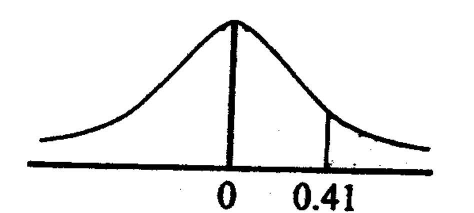
$= 0.4099 + 0.1879 = 0.5978.$



5. $P(Z \geq 0.41)$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.41)$

$= 0.5 - 0.1591 = 0.3409.$



مثال (٣) :

الجدول التالي يوضح مجموعة من الأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد مشروعات تطوير منتج معين وتتابعها والتقديرات الزمنية (بالشهور) لكل نشاط :

النشاط	النشاط السابق	وقت تنفيذ النشاط (بالشهور)		
		المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم
C	لا يوجد	5.5	8	10.5
D	لا يوجد	2	4.5	10
E	C	1	2	3
F	C	6.5	8	21.5
G	C	1	4	7
H	D , E	10	11	18
I	F	4	5	12
J	F	5	7	9
K	G	4	8	12
L	H , I	7	10	31
N	J , K	10	13	28

المطلوب :

١ - حساب الزمن المتوقع والتباين لكل نشاط .

٢ - رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج والزمن المتوقع لإتمام المشروع .

٣ - تصوير الخريطة الزمنية للمشروع موضحاً بها الوقت الراكد بمستوياته الثلاث لكل نشاط .

٤ - حساب الاحتمالات الأتية :

أ - احتمال تنفيذ المشروع في نهاية ثلاث سنوات على الأقل .

ب - احتمال تنفيذ المشروع في فترة تتراوح ما بين 43 ، 48 شهراً .

الحـــل :

١ - لحساب الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط سوف نرمز – كما سبق أن بينا – للوقت المتفائل بالرمز A ، الوقت الأكثر احتمالاً بالرمز M ، الوقت المتشائم بالرمز B ، والوقت المتوقع للنشاط (i - j) بالرمز t_{ij} ، التباين للنشاط (i - j) بالرمز σ_{ij}^2 فإن :

$$t_{ij} = \frac{A_{ij} + 4M_{ij} + B_{ij}}{6}$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{B_{ij} - A_{ij}}{6}\right)^2$$

فعلى سبيل المثال ، بالنسبة للنشاط C أو (1 - 2) يلاحظ أن :

$$t_{12} = \frac{5.5 + 4(8) + 10.5}{6} = 8 \text{ (شهور)}$$

$$\sigma^2_{12} = \left(\frac{10.5 - 5.5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

وأيضا بالنسبة للنشاط D أو (3 - 1) يلاحظ أن :

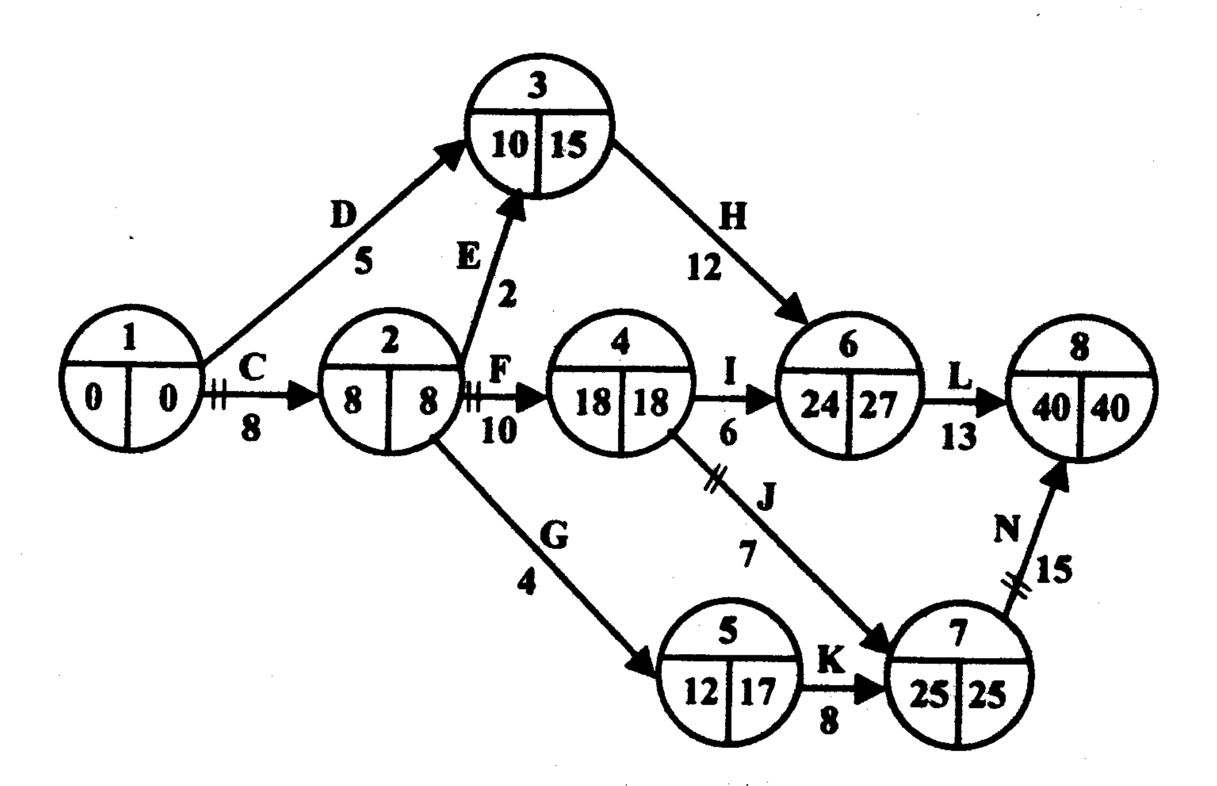
$$t_{13} = \frac{2 + 4(4.5) + 10}{6} = 5 \text{ (شهور)}$$

$$\sigma^2_{13} = \left(\frac{10 - 2}{6}\right)^2 = \frac{64}{36}$$

وهكذا بالنسبة لباقي أنشطة المشروع كما يتضح بالجدول التالي :

النشاط	مسار النشاط (i-j)	النشاط السابق	وقت تنفيذ النشاط بالشهور: المتفائل A_{ij}	الأكثر احتمالاً M_{ij}	المتشائم B_{ij}	الوقت المتوقع t_{ij}	التباين σ^2_{ij}	
C	(1-2)	لا يوجد	5.5	8	10.5	8	25/36	*
D	(1-3)	لا يوجد	2	4.5	10	5	64/36	
E	(2-3)	C	1	2	3	2	4/36	
F	(2-4)	C	6.5	8	21.5	10	225/36	*
G	(2-5)	C	1	4	7	4	36/36	
H	(3-6)	D , E	10	11	18	12	64/36	
I	(4-6)	F	4	5	12	6	64/36	
J	(4-7)	F	5	7	9	7	16/36	*
K	(5-7)	G	4	8	12	8	64/36	
L	(6-8)	H , I	7	10	31	13	576/36	*
N	(7-8)	J , K	10	13	28	15	324/36	

٢ ـ رسم شبكة الأعمال :



وكما هو واضح فإن المسار الحرج يتكون من الأنشطة C ، F ، J ، N أو الأنشطة (2 - 1) ، (4 - 2) ، (7 - 4) ، (8 - 7) • ويكون الوقت المتوقع لإنجاز المشروع = طول المسار الحرج = 40 شهراً •

٣ ـ يتم تصوير الخريطة الزمنية والوقت الراكد بمستوياته الثلاث لأنشطة المشروع من خلال الجدول التالي :

النشاط	مسار النشاط (i-j)	الوقت المتوقع (بالشهور) t_{ij}	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		الوقت الراكد		
			البداية ES_i	النهاية EF_{ij}	البداية LS_{ij}	النهاية LS_j	الإجمالي TF_{ij}	الحر FF_{ij}	المستقل IF_{ij}
C	(1-2)	8	0	8	0	8	0	0	0
D	(1-3)	5	0	5	10	15	10	5	5
E	(2-3)	2	8	10	13	15	5	0	0
F	(2-4)	10	8	18	8	18	0	0	0
G	(2-5)	4	8	12	13	17	5	0	0
H	(3-6)	12	10	22	15	27	5	2	-3
I	(4-6)	6	18	24	21	27	3	0	0
J	(4-7)	7	18	25	18	25	0	0	0
K	(5-7)	8	12	20	17	25	5	5	0
L	(6-8)	13	24	37	27	40	3	3	0
N	(7-8)	15	25	40	25	40	0	0	0

٤ ـ احتمالات تنفيذ المشروع :

نفرض أن الزمن المستهدف لإنجاز المشروع هو المتغير العشوائي T

أ ـ الزمن المستهدف لإنجاز المشروع هو : T = 3 سنوات = 36 شهراً

الزمن المتوقع لإنجاز المشروع هو : μ = طول المسار الحرج = 40 شهراً

الانحراف المعياري لوقت إنجاز المشروع هو σ ، حيث :

$$\sigma = \sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة}} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{225}{36} + \frac{16}{36} + \frac{576}{36}}$$

$= 4.84$ (شهراً)

إذن :

احتمال تنفيذ المشروع في 3 سنوات على الأكثر يحسب كما يلي :

$$P(T \leq 36) = P(\frac{T - \mu}{\sigma} \leq \frac{36 - \mu}{\sigma})$$

$$= P(Z \leq \frac{36 - 40}{4.84}) =$$

$$= P(Z \leq -0.83)$$

-0.83 0

$$= 0.5 - P(-0.83 \leq Z \leq 0)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.83)$$

$$= 0.5 - 0.2967 = 0.2033$$

حيث نلاحظ أن :

$$P(-0.83 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0.83)$$

وذلك لأن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول خط الوسط وهو $\mu = 0$.

وللحصول على القيمة الاحتمالية : $P(0 \leq Z \leq 0.83)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ندخل الجدول وفق الصف 0.8 والعمود 0.03 فنجد عند ملتقاهما القيمة 0.2967 .

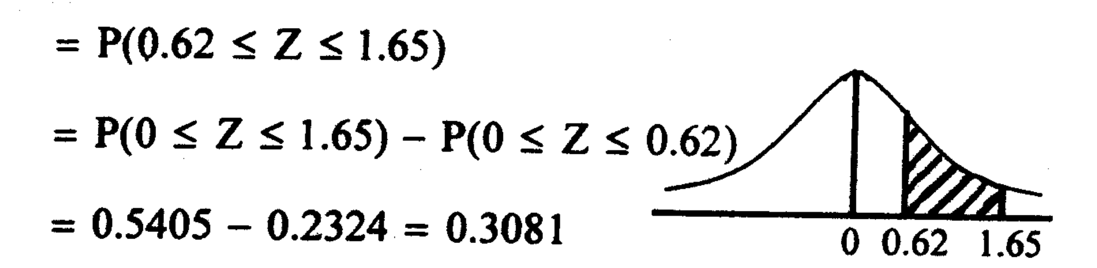
ب - احتمال تنفيذ المشروع في فترة زمنية تتراوح بين 43 ، 48 شهراً هو :

$$P(43 \leq T \leq 48) = P(\frac{43 - 40}{4.84} \leq \frac{T - 40}{4.84} \leq \frac{48 - 40}{4.84})$$

$$= P(0.62 \leq Z \leq 1.65)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.65) - P(0 \leq Z \leq 0.62)$$

$$= 0.5405 - 0.2324 = 0.3081$$



(٥-٢-٣) تحليل الوقت / تكلفة في شبكات الاعمال

Time / Cost Analysis in Activity Networks

مما لا شك فيه أن أسلوبي المسار الحرج وبيرت ركزا الاهتمام في بداية الأمر على عنصر الزمن ، واعتبر أن عنصر الزمن هو المقياس الوحيد للفعالية والرقابة في برمجة المشروعات ، إلا أن تنفيذ أنشطة المشروع لا تتطلب فترة زمنية فحسب بل تحتاج أيضاً إلى موارد مادية يمكن التعبير عنها في صورة تكلفة محددة ٠ وفي معظم الحالات فإن تكلفة إنجاز النشاط تعتمد على الوقت اللازم لتنفيذه ، وبالتبعية ، فإن تكلفة إنجاز المشروع ككل سوف تعتمد على وقت الإنجاز الكلي للمشروع بحيث إذا زادت كمية الموارد المخصصة لتنفيذ المشروع سيؤدي ذلك بالقطع إلى خفض الزمن اللازم لإتمام المشروع والعكس صحيح ٠

لذلك تم بناء شبكات الأعمال للتكلفة بنفس أسلوب بناء شبكات الأعمال للزمن وذلك بهدف إيجاد نوع من التوازن بين التكاليف اللازمة وأوقات التنفيذ المتفاوتة للأنشطة المختلفة بغية تحقيق الجدولة المثلى لأنشطة المشروع ٠

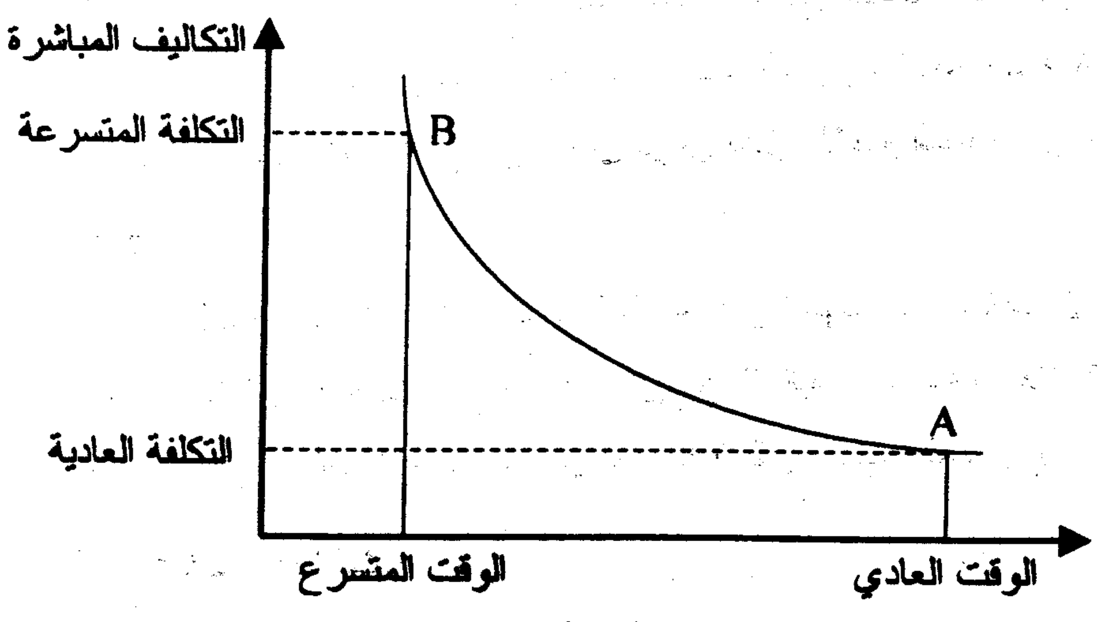
أ - عناصر التكاليف :

تتكون التكاليف الكلية لأي مشروع من التكاليف المباشرة والتكاليف غير المباشرة المستخدمة في التنفيذ ٠

أ - التكاليف المباشرة :

تعتبر التكاليف المباشرة هي التكاليف التي تعتمد مباشرة على كمية الموارد المستخدمة في تنفيذ الأنشطة المختلفة للمشروع مثل تكلفة المواد الخام وتكلفة تشغيل أو تأجير الآلات وتكلفة العمالة اللازمة لتنفيذ النشاط ، وإذا كان تنفيذ النشاط يتم من خلال عقود من الباطن فإن قيمة هذه العقود بالكامل تعتبر تكاليف مباشرة لتنفيذ النشاط ٠

ومما لا شك فيه أن العلاقة بين التكلفة المباشرة ووقت تنفيذ النشاط علاقة عكسية كما يتضح في شكل (٥ ـ ١٠) حيث يتناقص وقت إنجاز النشاط بزيادة التكاليف المباشرة لهذا النشاط ٠ وفي هذا الإطار يتم عمل تقديرات متعددة لتكلفة كل نشاط تناظر أزمنة مختلفة لإنجاز هذا النشاط بدرجات ثقة معينة ، هذه التقديرات تتراوح بين مستويين هما :



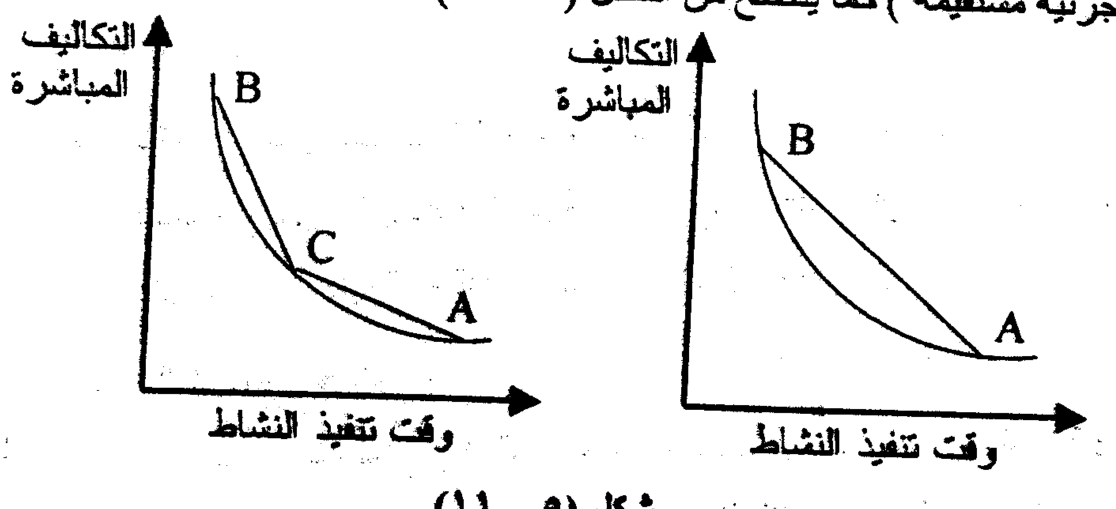
شكل (٥ ـ ١٠)

المستوى العادي : وهو يمثل الحد الأقصى لوقت تنفيذ النشاط والحد الأدنى للتكاليف المباشرة اللازمة للتنفيذ في ظل الظروف العادية ، ويمثله على المنحنى النقطة A • وكما يتضح من الشكل السابق فإذا حدث زيادة في وقت تنفيذ النشاط عن هذا المستوى (أي بعد النقطة A) فإن الخفض الحادث في التكاليف المباشرة نتيجة لذلك سوف يكون طفيفاً جداً •

المستوى المتسرع : وهو يمثل الحد الأدنى لوقت تنفيذ النشاط والحد الأقصى للتكاليف المباشرة التي يمكن تكثيفها لتنفيذ النشاط ويمثله على المنحنى النقطة B •

وكما هو واضح من الشكل السابق فإن أي تخفيض – ولو طفيف – في وقت تنفيذ النشاط عن هذا المستوى (أي قبل النقطة B) سوف يستتبع ذلك زيادة كبيرة في التكاليف المباشرة •

وتسهيلاً للحسابات سوف يتم تقريب المنحنى الذي يمثل العلاقة بين وقت تنفيذ النشاط والتكاليف المباشرة إلى خط مستقيم واحد (وأحياناً عدة خطوط جزئية مستقيمة) كما يتضح من الشكل (٥ – ١١) •



شكل (٥ – ١١)

وميل هذا الخط المستقيم سوف يشير إلى الزيادة في التكاليف المباشرة نتيجة خفض وقت تنفيذ النشاط بوحدة زمن واحدة ويسمى الميل بميل التكلفة ، ويحسب ميل التكلفة للنشاط كما يلي :

$$\text{ميل التكلفة للنشاط} = \frac{\text{مقدار التغير في التكلفة للنشاط}}{\text{مقدار التغير في وقت تنفيذ النشاط}}$$

$$= \frac{\text{التكلفة المتسرعة – التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي – الوقت المتسرع}}$$

ب - التكاليف غير المباشرة :

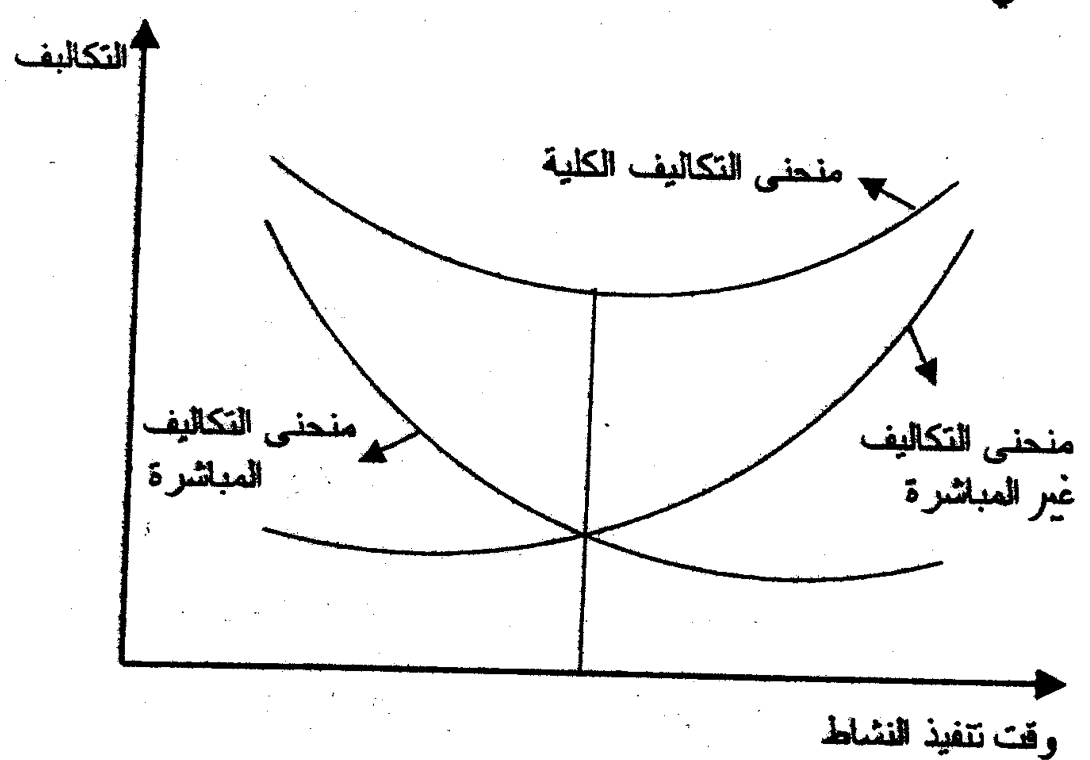
التكاليف غير المباشرة هي التكاليف التي لا يوجد بينها وبين أنشطة المشروع علاقة مباشرة ، وتنقسم التكاليف غير المباشرة إلى تكاليف غير مباشرة ثابتة وتكاليف غير مباشرة متغيرة ٠

- **التكاليف غير المباشرة الثابتة :** هي التكاليف التي لا تتوقف على مدى التقدم في إنجاز المشروع ، وتضم المصروفات الإدارية والعامة والتأمين والضرائب ٠
- **التكاليف غير المباشرة المتغيرة :** هي التكاليف التي تتوقف على وقت تنفيذ المشروع في شكل دالة طردية ، وتتمثل في تكلفة التمويل وتكلفة الإشراف على التنفيذ والإهلاك والفائدة على رأس المال ٠٠٠ الخ ٠

جـ - التكاليف الإجمالية :

تمثل التكاليف الإجمالية مجموع عناصر التكاليف المباشرة وغير المباشرة (سواء كانت ثابتة أم متغيرة) ٠ فإذا كانت علاقة التكاليف المباشرة

بوقت تنفيذ النشاط علاقة عكسية ، ولما كانت علاقة التكاليف غير المباشرة ووقت تنفيذ النشاط علاقة طردية ، فإن العلاقة بين التكاليف الكلية ووقت تنفيذ النشاط هي محصلة هذين الاتجاهين المتضادين كما يتضح من الشكل (٥ ـ ١٢) :



شكل (٥ ـ ١٢)

ب - اختزال زمن المشروع :

تحليل عنصر التكلفة في شبكات الأعمال يهدف إلى الوصول إلى الحد الأدنى لوقت إنجاز المشروع بأقل زيادة ممكنة في التكاليف العادية (الطبيعية) ، ويتم ذلك من خلال عدة خطوات نوردها فيما يلي :

١ ـ تحديد المستويين العادي والمتسرع لوقت تنفيذ النشاط والتكلفة المباشرة وغير المباشرة لكل مستوى منهما ٠

٢ - حساب ميل التكلفة المباشرة لكل نشاط وفقاً للعلاقة السابق الإشارة إليها ٠

٣ - تحديد المسار الحرج وفقاً لأوقات التنفيذ العادية للأنشطة ٠

٤ - يتم اختزال زمن المشروع وذلك باختصار أزمنة أنشطة المسار الحرج فقط ، ولكي يتم اختزال الزمن بأقل تكلفة ممكنة ، نبدأ باختيار النشاط الذي له أقل ميل تكلفة مباشرة من بين الأنشطة الواقعة على المسار الحرج ونضغط زمن هذا النشاط ، ويتم تحديد مستوى الضغط أو التعجيل على أساس اختيار القيمة الأقل من بين الحد الأقصى المتاح لتعجيل النشاط موضع الاختيار (وهو الفرق بين الوقتين العادي والمتسرع) وأقل قيمة للوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة ، أي أن :

حدود ضغط (أو تعجيل) النشاط = الأصغر من (الحد الأقصى المتاح لضغط النشاط ، أقل وقت راكد حر للأنشطة غير الحرجة) ٠

٥ - يتم تحديد المسار الحرج من جديد وتتكرر الخطوة رقم (٤) إلى أن يتم ضغط جميع الأنشطة الحرجة والتي لها ميل تكلفة أقل من أو يساوي التكلفة غير المباشرة ٠ وفي هذه الحالة نصل إلى الحد الأدنى لوقت تنفيذ المشروع بأقل زيادة ممكنة في التكاليف الطبيعية ٠

ويلاحظ أنه في حالة ظهور أكثر من مسار حرج في شبكة الأعمال – خلال جولات الحل – فنبدأ باختيار الأنشطة المشتركة بين المسارات الحرجة ويتم تعجيلها وفقاً للخطوة رقم (٤) ، وفي حالة عدم وجود أنشطة مشتركة بين المسارات الحرجة فيتم تعجيل نشاط على كل مسار حرج حتى يمكن تخفيض الوقت الإجمالي لتنفيذ المشروع ٠

مثال (٤) :

اعتبر الجدول التالي الذي يبين الأنشطة الضرورية لتنفيذ أحد المشروعات وتتابعها الفني والمنطقي والمستويين العادي والمتسرع لوقت تنفيذ الأنشطة (بالشهور) وكذلك التكلفة المباشرة وغير المباشرة (بالألف جنيه) المرتبطة بكل منهما :

النشاط	مسار النشاط (i-j)	النشاط السابق	المستوى العادي		المستوى المتسرع	
			وقت	تكلفة مباشرة	وقت	تكلفة مباشرة
A	(1-2)	لا يوجد	8	100	6	116
B	(1-3)	لا يوجد	13	150	10	162
C	(2-4)	A	5	60	3	72
D	(2-5)	A	14	115	10	135
E	(3-4)	B	6	65	3	83
F	(4-5)	C , E	6	40	3	70
G	(4-6)	D , F	8	84	6	98
H	(5-6)	C , E	7	57	6	60

إجمالي التكاليف المباشرة = 671 ألف جنيه

التكاليف غير المباشرة المتغيرة = 2 (ألفان جنيه) شهرياً

التكاليف غير المباشرة الثابتة = 15 ألف جنيه ٠

المطلوب :

١ - حساب ميل التكلفة لكل نشاط ورسم شبكة الأعمال وتحديد الوقت العادي اللازم لتنفيذ المشروع والتكلفة الإجمالية للتنفيذ في هذه الحالة ٠

٢ - اختزال وقت تنفيذ المشروع بمقدار 8 شهور بحيث تتحقق أقل زيادة ممكنة في التكاليف •

الحـــل :

١ - يتم حساب ميل التكلفة لكل نشاط وفقاً للعلاقة التالية :

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرع}}$$

ميل التكلفة للنشاط A هو : $\frac{116-100}{8-6} = 8$

ميل التكلفة للنشاط B هو : $\frac{162-150}{13-10} = 4$

ميل التكلفة للنشاط C هو : $\frac{72-60}{5-3} = 6$

ميل التكلفة للنشاط D هو : $\frac{135-115}{14-10} = 5$

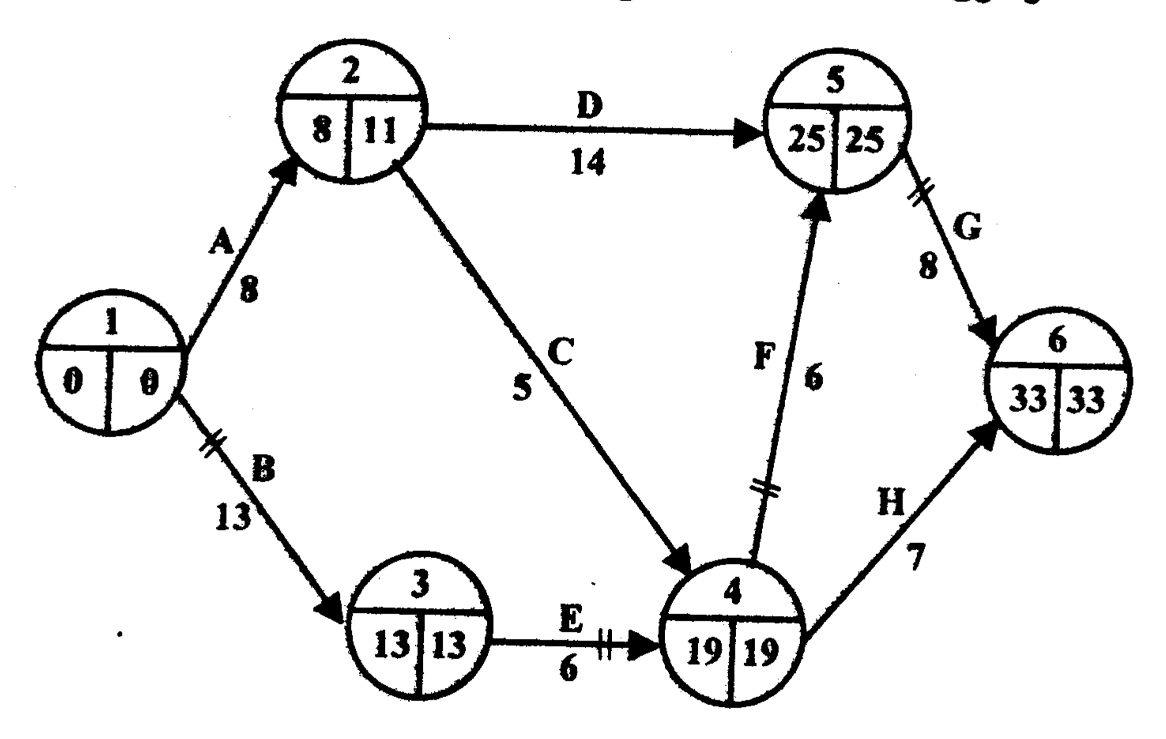
ميل التكلفة للنشاط E هو : $\frac{83-65}{6-3} = 6$

ميل التكلفة للنشاط F هو : $\frac{70-40}{6-3} = 10$

ميل التكلفة للنشاط G هو : $\frac{98-84}{8-6} = 7$

ميل التكلفة للنشاط H هو : $\frac{60-57}{7-6} = 3$

وتكون شبكة الأعمال للمشروع وفقاً للأوقات العادية على النحو التالي :



٢ ـ فيما يلي جولات اختزال وقت تنفيذ المشروع :

أ ـ الجولة الأولى :

المسار الحرج يتكون من الأنشطة : B ، E ، F ، G أو (3 - 1) ، (4 - 3) ، (5 - 4) ، (6 - 5) ويستغرق المشروع 33 شهراً .

التكلفة الإجمالية = التكلفة المباشرة + التكاليف غير المباشرة

وتحسب كما يلي :

671 + 2(33) + 15 = 752 (ألف جنيه)

ب ـ الجولة الثانية :

يتم اختيار النشاط الحرج الذي له أقل ميل تكلفة مباشرة وهو النشاط B أو (3 - 1) ويتم البدء في تعجيله ، ولتحديد مدى الضغط نلاحظ أن :

الحد الأقصى المتاح لتعجيل النشاط B = 3 (وهو الفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع)

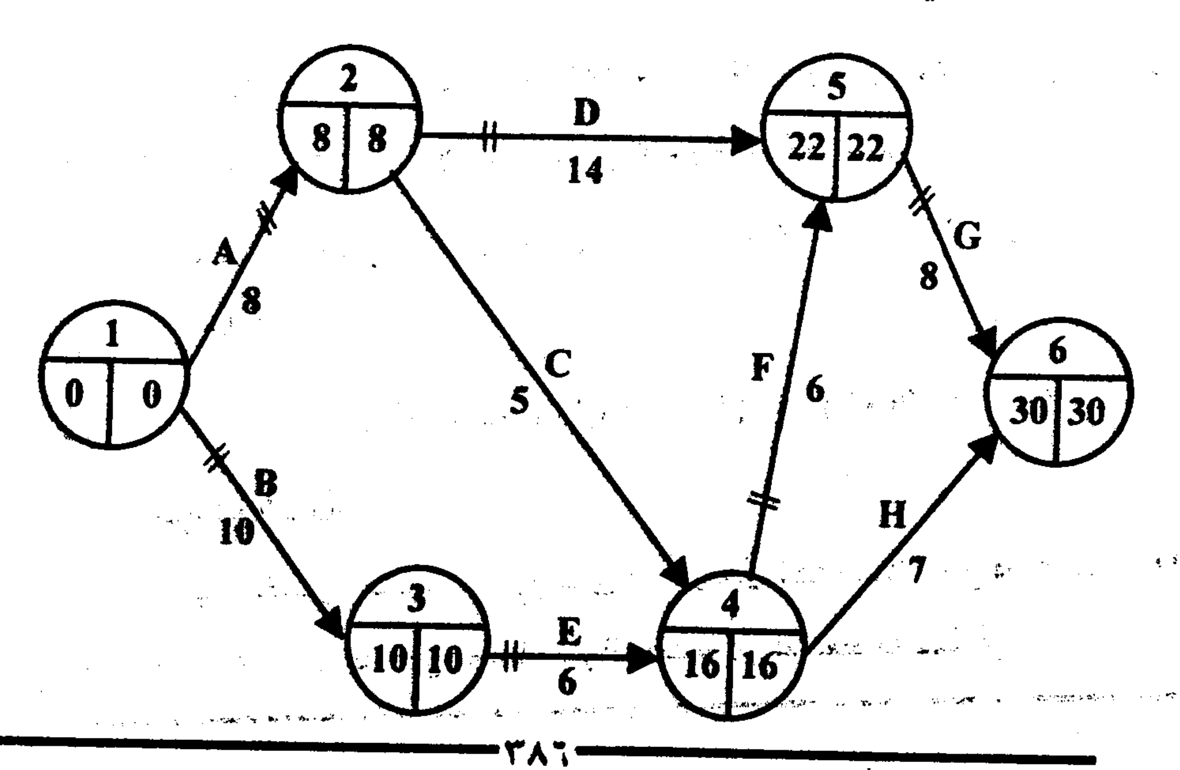
الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهي : A ، C ، D ، H يساوي ، على الترتيب ، 0 ، 6 ، 3 ، 7 ، وبالتالي فإن :

أصغر وقت راكد حر للأنشطة غير الحرجة (بعد استبعاد القيمة 0) = 3

وتكون حدود الضغط هي :

$$\text{Min}(3, 3) = 3$$

لذلك يتم تخفيض زمن النشاط B بمقدار 3 شهور ، أي يتم تنفيذ النشاط B في 10 شهور بدلاً من 13 شهراً ، وتصبح شبكة الأعمال في هذه الجولة كما يلي :



تم تخفيض وقت تنفيذ المشروع الكلي من 33 إلى 30 شهراً ، بزيادة في التكاليف المباشرة قدرها 12 = (4 × 3) ، بينما نتج عن هذا الخفض نقص في التكاليف غير المباشرة قدرها 6 = (2 × 3) ، ومن ثم فإن :

التكاليف الإجمالية = التكاليف المباشرة + التكاليف غير المباشرة

وتحسب كما يلي :

$$(671 + 12) + 2(30) + 15 = 758$$ (ألف جنيه)

جـ - الجولة الثالثة :

تحتوى شبكة الأعمال الآن على مسارين حرجيين هما :

المسار الحرج الأول مكون من الأنشطة A ، D ، G

المسار الحرج الثاني مكون من الأنشطة B ، E ، F ، G

وبالطبع فإن طول المسارين متساوي ويساوي 30 شهراً ، وحيث أنه يوجد نشاط حرج مشترك بين هذين المسارين وهو النشاط G ، لذلك يتم تخفيض وقت تنفيذ النشاط G . ولتحديد مدى التخفيض أو الضغط في زمن هذا النشاط نلاحظ ما يلي :

الحد الأقصى المتاح لتعجيل النشاط G = 2 (وهو الفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع)

الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهما النشاطين C ، H وهو يساوي 3 ، 7 على الترتيب ،

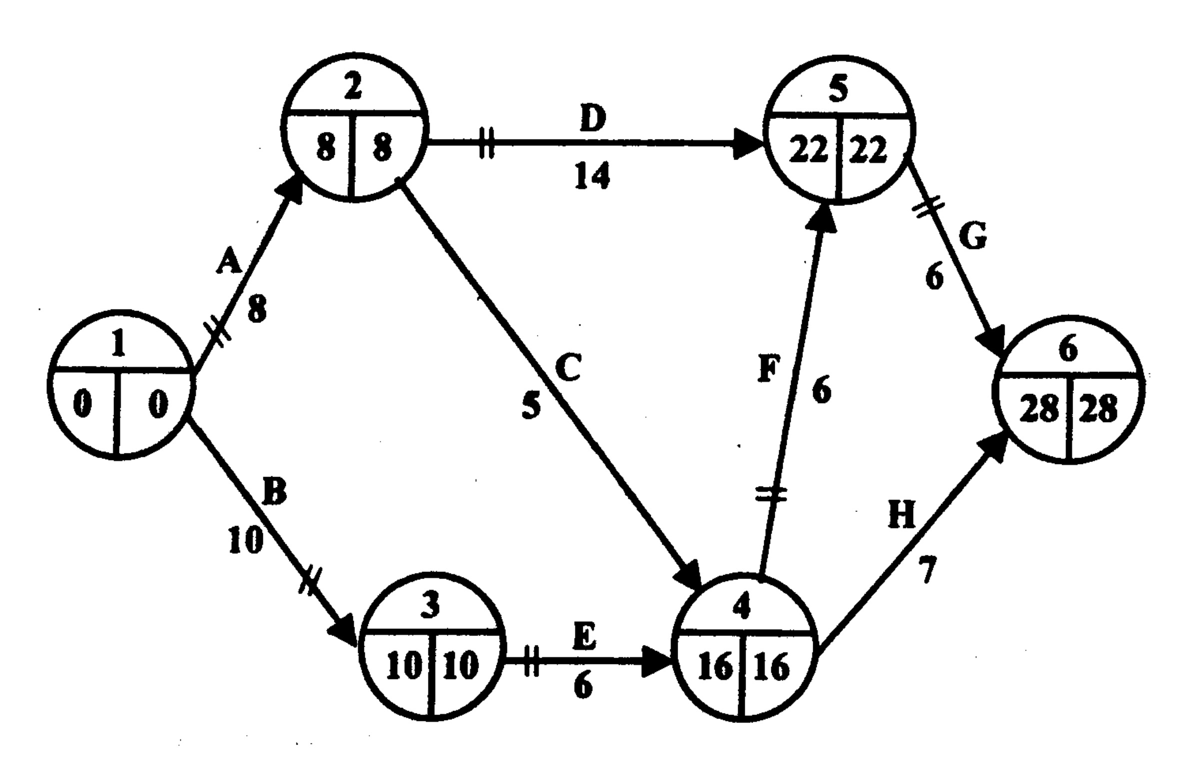
ويكون أصغر وقت راكد حر للأنشطة غير الحرجة = 3 ،

إذن :

حدود ضغط النشاط G هي :

$$\text{Min } (2, 3) = 2$$

يتم تخفيض وقت النشاط G بمقدار شهرين حيث يتم تنفيذه في 6 شهور بدلاً 8 شهور وتصبح شبكة الأعمال في هذه الجولة كما يلي :



تم تخفيض وقت إنجاز المشروع الكلي من 30 إلى 28 شهراً ، أي بمقدار شهرين بزيادة في التكاليف المباشرة قدرها 14 = (7 × 2) ، بينما نقصت التكاليف غير المباشرة بمقدار 4 = (2 × 2) ، ومن ثم فإن :

التكاليف الإجمالية = التكاليف المباشرة + التكاليف غير المباشرة

وتحسب كما يلي :

$$(671 + 12 + 14) + 2(28) + 15 = 768$$ (ألف جنيه)

د - الجولة الرابعة :

يوجد الآن مسارين حرجيين هما :

المسار الحرج الأول مكون من الأنشطة A ، D ، G

المسار الحرج الثاني مكون من الأنشطة B ، E ، F ، G

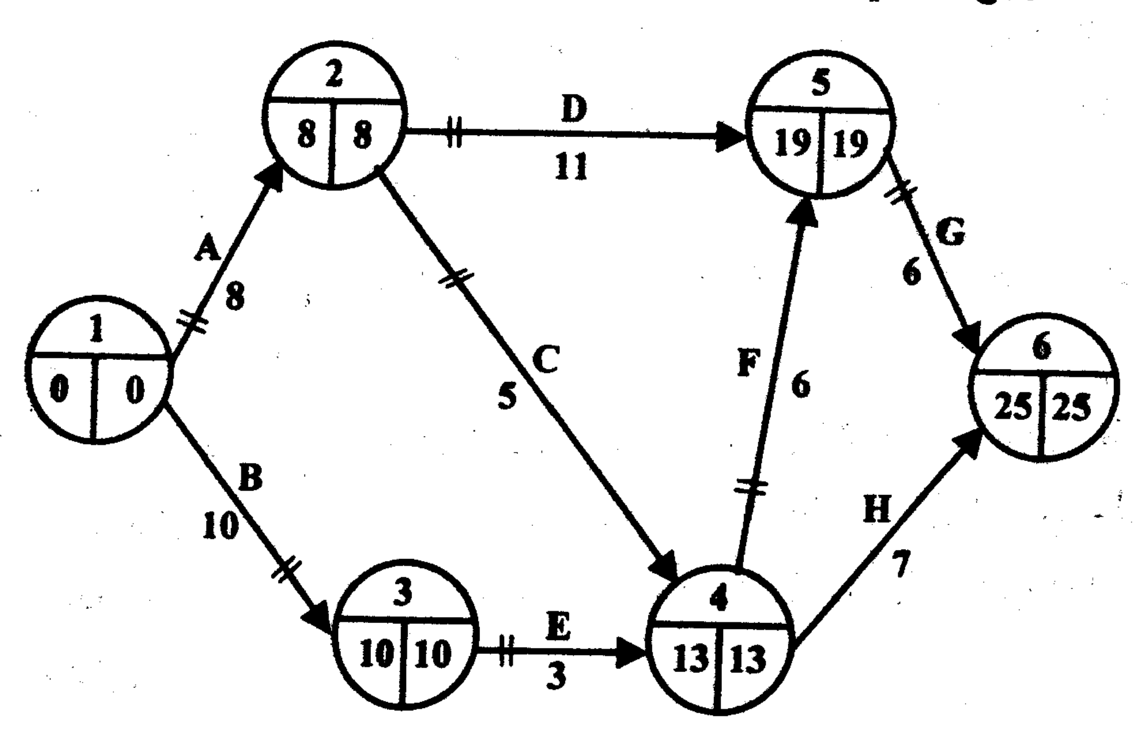
ونلاحظ أنه لم يعد بين المسارين الحرجيين نشاط حرج مشترك ، وذلك لأن النشاط الحرج المشترك بينهما وهو النشاط G تم تخفيضه إلى المستوى المتسرع له ومن ثم لم يعد قابلاً للتخفيض ٠

في هذه الحالة يتم تخفيض كل مسار من المسارين الحرجيين بنفس القدر ، حيث نجد أن :

في المسار الحرج الأول يتم اختيار نشاط من النشاطين A ، D وفقاً لقيمة ميل التكلفة لكل منهما ، حيث يتم اختيار النشاط D لأن له أقل ميل تكلفة ، وهو يقبل الضغط في حدود 4 شهور (الفرق بين وقت التنفيذ العادي والمتسرع) ٠

وفي المسار الحرج الثاني يتم اختيار نشاط من النشاطين E ، F فقط (لأن النشاطين B ، G تم تخفيض وقت كل منهما إلى المستوى المتسرع) ثم يختار النشاط E لأن له أقل ميل تكلفة ، وهو يقبل الضغط في حدود 3 شهور (الفرق بين وقت التنفيذ العادي والمتسرع) ، كما أن الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهما C ، H يساوي ، على الترتيب ، 3 ، 5 ٠

وحيث أن المطلوب هو تخفيض وقت تنفيذ المشروع الآن بمقدار 3 شهور (حتى يتحقق الخفض المطلوب في وقت إنجاز المشروع الكلي بمقدار 8 شهور) ، لذلك سوف يتم تخفيض وقت تنفيذ كل من النشاطين D ، E بمقدار 3 شهور ، حيث يتم تنفيذ النشاط D في 11 شهراً بدلاً من 14 شهراً ، ويتم تنفيذ النشاط E في 3 شهور بدلاً من 6 شهور ، وتصبح شبكة الأعمال للمشروع كما يلي :



تم تخفيض وقت تنفيذ المشروع من 28 إلى 25 شهراً أي بمقدار 3 شهور ، بزيادة في التكاليف المباشرة قدرها :

$3 \times 5 + 3 \times 6 = 33$ (ألف جنيه)

بينما نقصت التكاليف غير المباشرة بمقدار

$2 \times 3 = 6$ (آلاف جنيه)

ومن ثم فإن :

التكاليف الإجمالية تحسب كما يلي :

$$(671 + 12 + 14 + 33) + 2(25) + 15 = 795$$ (ألف جنيه)

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي :

الجولة	النشاط المعجل	الوقت المضغوط	الوقت الإجمالي للمشروع (بالشهور)	التكاليف (بالألف جنيه)			
				المباشرة	غير المباشرة		الإجمالية
					المتغيرة	الثابتة	
الأولى	لا يوجد	-	33	671	66	15	752
الثانية	B	3	30	683	60	15	758
الثالثة	G	2	28	697	56	15	768
الرابعة	D ، E	3	25	730	50	15	795

ملاحظات :

١ - تحليل الوقت / تكلفة بشبكة الأعمال يبدأ في الجولة الأولى باعتبار المستوى العادي لكل من وقت التنفيذ وتكلفة التنفيذ لكافة الأنشطة بالشبكة ولذلك يتم تحديد المسار الحرج الطبيعي في هذه الجولة .

٢ - يمكن الاستمرار في عملية تخفيض وقت تنفيذ الأنشطة بالشبكة من خلال الاستمرار في جولات الحل المختلفة وذلك إما للوصول إلى وقت تنفيذ مستهدف مضغوط للمشروع يرغب متخذو القرار في الوصول إليه ، كما في المثال السابق ، حيث كان الهدف هو اختزال وقت تنفيذ المشروع إلى

25 شهراً ، وإما أن يتم تخفيض كافة أنشطة المشروع إلى أزمنتها المتسرعة دون أن يتم تحويل مسار حرج بشبكة الأعمال إلى مسار غير حرج ، ويكون البديل الأمثل لتنفيذ المشروع هو ذلك الذي يقابل أدنى تكلفة تنفيذ إجمالية من بين كافة البدائل وقت / تكلفة لتنفيذ المشروع •

٣ - يمكن استبعاد التكاليف غير المباشرة الثابتة من التحليل دون أن يؤثر ذلك على نتائج التحليل لأنها غير مرتبطة بوقت تنفيذ المشروع ، وهي تؤخذ فقط في الاعتبار لحساب التكاليف الإجمالية لتنفيذ المشروع •

٤ - تحليل وقت / تكلفة لشبكة الأعمال يمكن من التكيف بسرعة مع قيود الميزانية ، ففي المثال السابق يمكن – على سبيل المثال – أن نجيب على السؤال التالي :

ما هو الحد الأدنى لوقت تنفيذ المشروع إذا كانت الميزانية المخصصة للتنفيذ هي 768 ألف جنيه ؟

فإذا نظرنا إلى الجدول السابق الذي يلخص نتائج التخفيض لجولات الحل المختلفة ، نستطيع بسهولة أن نقرر أن الحد الأدنى المطلوب لوقت تنفيذ المشروع في ضوء هذه الميزانية هو 28 شهراً •

كما نستطيع بسهولة أيضاً الإجابة على أسئلة تطرح بصيغ عكسية ، فعلى سبيل المثال ، يمكن الإجابة على السؤال التالي :

ما هو الحد الأدنى لتكلفة إنجاز المشروع في 25 شهراً ؟

وتكون الإجابة ببساطة هي 795 ألف جنيه •

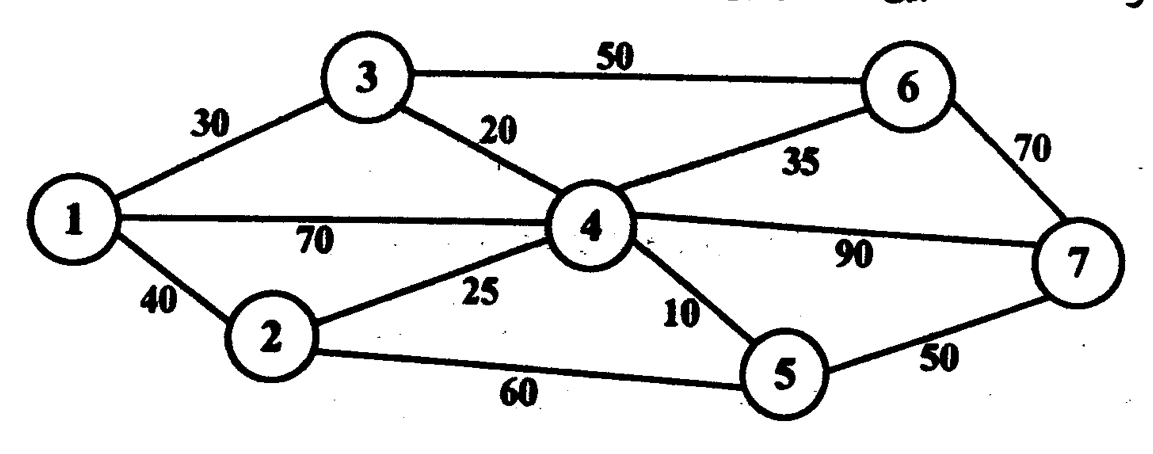
(٥-٣) مشكلة أقصر طريق The Shortest – Route Problem

درسنا في الجزء السابق والخاص بشبكات الأعمال بنوعيها : أسلوب المسار الحرج (CPM) وبيرت (PERT) أن الاهتمام يكون منصباً على تحديد المسار الحرج وهو أطول مسارات الشبكة طولاً (أو زمناً) من حدث البداية إلى حدث النهاية • وإلى جانب شبكات الأعمال يوجد نوع آخر من الشبكات على جانب كبير من الأهمية من وجهة النظر العملية تسمى شبكات أقصر طريق •

في هذا نوع من الشبكات يرتبط بكل نشاط (i - j) من أنشطة الشبكة مسافة d_{ij} (وربما يكون زمن انتقال t_{ij} أو تكلفة انتقال c_{ij}) غير سالبة من الحدث i إلى الحدث j •

ويكون الهدف في شبكات أقصر طريق هو تحديد أقصر الطرق (أو الطريق الأقل زمناً أو الأقل تكلفة) من حدث البداية بالشبكة حتى أي حدث آخر بالشبكة •

فعلى سبيل المثال ، إذا كان هناك شبكة للطرق تربط بين سبع مدن وكانت المسافة بين كل مدينتين من تلك المدن بالكيلومتر موضحة كما يلي :



وبفرض أن تاجراً يرغب في السفر من المدينة 1 إلى المدينة 7 ، فإن مشكلة أقصر طريق تهتم بتحديد الطرق أو المسارات التي يجب أن يسلكها التاجر في سفره بحيث تكون مسافة الانتقال الكلية أصغر ما يمكن ٠

طريقة تحديد أقصر طريق Shortest - Route Method

بفرض أن حدث البداية بالشبكة هو الحدث رقم 1 والذي نطلق عليه اسم المصدر Source Node ، وأن حدث النهاية بالشبكة هو الحدث رقم n والذي نطلق عليه اسم المصب Sink Node ٠ فيتم تحديد أقصر طريق بالشبكة من حدث البداية 1 حتى حدث النهاية n باستخدام أسلوب التحديد أو التعيين Labeling Procedure ، وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

يتم توزيع جميع طرق (أو أنشطة) الشبكة تحت أحداثها مع مراعاة ما يلي :

أ - نضع كل طريق (أو نشاط) أسفل حدث البداية الخاص به ، أي نضع الطريق (i - j) أسفل الحدث i ، حيث $i,j \leq n$ ٠

ب - نرتب الطرق (أو الأنشطة) أسفل كل حدث في ترتيب تصاعدي من حيث المسافة (أو الزمن أو التكلفة) ٠

جـ - يتم حذف أي طريق (أو نشاط) يكون حدث النهاية له هو الحدث رقم 1 (أي حدث المصدر) أو يكون حدث البداية له هو الحدث رقم n (أي حدث المصب) ٠

د - نميز حدث البداية (أو المصب) بنجمة ويرفق به القيمة صفر ، أي يكتب $1^{*}(0)$ والصفر هنا يعني أن المسافة من حدث المصب إلى حدث المصب تساوي الصفر •

الخطوة 2 :

يتم تحديد أقصر (أو أرخص) طريق (أو نشاط) يقع تحت حدث البداية ونضعه داخل دائرة لتمييزه ، وليكن الطريق $(1 - i)$ ثم نميز حدث النهاية لهذا الطريق وهو الحدث i بنجمة ونرفق بهذا الحدث قيمة تساوي طول (أو تكلفة) الطريق (أو النشاط) ، $(1 - i)$ ، أي يكتب $i^{*}(d_{1i})$ ، ثم تحذف بعد ذلك كل الطرق (أو الأنشطة) الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث i •

الخطوة 3 :

إذا كان حدث النهاية المميز بنجمة هو حدث المصب ، أي هو $n^{*}(d_{jn})$ ، نذهب إلى الخطوة 5 ، وإذا لم يكن كذلك نذهب إلى الخطوة 4 •

الخطوة 4 :

تحدد كل الأحداث المميزة بنجوم والتي يوجد تحتها طرق (أو أنشطة) غير محاطة بدوائر ، وبالنسبة لكل حدث من هذه الأحداث يتم عمل الآتي :

أ - نضيف القيمة المرفقة بكل حدث من هذه الأحداث إلى قيمة أقصر (أو أرخص) طريق (أو نشاط) غير محاط بدائرة وموجود أسفل هذا الحدث ويرمز لأصغر مجموع من بين هذه المجاميع بالرمز D •

ب - نحيط الطريق (أو النشاط) الذي ساهم في تحديد قيمة D بدائرة ، ونميز حدث النهاية لهذا الطريق (أو النشاط) بنجمة ونرفق بهذا الحدث القيمة D •

جـ - يتم حذف كل الطرق (أو الأنشطة) الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو آخر حدث تم تمييزه بنجمة •

د - نذهب إلى الخطوة 3 •

الخطوة 5 :

أقصر مسافة (أو أقل تكلفة) تكون هي القيمة المرافقة لحدث النهاية (أو المصب) ، n ، فإذا تم لحدث النهاية التمييز $n^*(Z)$ ، فتكون Z هي قيمة أقصر طريق (أو أقل تكلفة) من حدث البداية 1 حتى حدث النهاية n •

يتم تحديد مسار أقصر طريق (أو أقل تكلفة) بشكل عكسي إبتداءً من حدث النهاية n وذلك بإضافة كل الطرق (أو الأنشطة) المحاطة بدوائر إلى المسار ، والتي تتبع كل أحداث النهاية لها هذا المسار •

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الطريقة سوف تحدد أقصر الطرق من حدث البداية إلى جميع أحداث الشبكة في عدد من المحاولات يساوي $(n - 1)$ •

وتتميز هذه الطريقة بأنها تمكن من تحديد أقصر طريق (أو أصغر تكلفة) من حدث البداية رقم 1 حتى أي حدث آخر بالشبكة ، فيمكن على سبيل المثال ، تحديد أقصر طريق (أو أصغر تكلفة) من حدث البداية 1 حتى أي حدث آخر بالشبكة وليكن الحدث k ، حيث $k < n$ ، ففي هذه الحالة تتوقف الحسابات الخاصة بهذه الطريقة بمجرد تمييز الحدث k بنجمة وتحديد الق

$k^*(D_l)$ ، فتكون D_l هي قيمة أقصر طريق من الحدث 1 إلى الحدث k ، ولا داعي إذن لاستكمال الحسابات الخاصة بالأحداث التالية للحدث k •

وجدير بالذكر أن هذه الطريقة تعطي حلاً لأقصر طريق أو لأصغر تكلفة أو لأقل زمن بالشبكة ، فهي تستخدم فقط في حالة تدنية المعيار المستخدم بالشبكة • ومن ثم فلا يمكن استخدامها في حالة تعظيم المنافع أو الأرباح بالشبكة • وتشترط هذه الطريقة أن تكون جميع قيم أنشطة الشبكة غير سالبة ، فإذا كانت القيمة المرتبطة بكل نشاط بالشبكة عبارة عن تكلفة هذا النشاط ، فوجود تكلفة سالبة لأحد الأنشطة بالشبكة تعني الربح المرتبط بهذا النشاط ، ففي هذه الحالة فإن الطريقة المذكورة لا تصلح للتطبيق ، وتوجد طرق متقدمة لتحديد أقصر طريق (أو أصغر تكلفة أو أقل زمن) بالشبكة في حالة وجود بعض القيم السالبة لأحد أو لبعض الأنشطة بالشبكة ولكنها تخرج عن نطاق هذا المؤلف •

مثال (٥) :

شركة المقاولون العرب (عثمان أحمد عثمان وشركاه) لها مركز رئيسي بمدينة الإسماعيلية ، ولدى الشركة مشروعات إنشائية مختلفة في ستة مواقع للعمل (بخلاف المركز الرئيسي) في منطقة القناة وسيناء • وتسيِّر الشركة رحلات يومية مزدوجة لنقل العمالة والآلات والمواد الخام من المركز الرئيسي إلى مواقع العمل ذهاباً ثم العودة مرة أخرى إلى المركز الرئيسي •

فإذا كانت المسافة (بالكيلومتر) بين المركز الرئيسي ومواقع العمل المختلفة موضحة بالجدول التالي :

	1 (المركز الرئيسي)	2	3	4	5	6	7
1 (المركز الرئيسي)	-	55	60	100	-	-	-
2	55	-	-	30	32	-	-
3	60	-	-	20	-	40	-
4	100	30	20	-	25	10	70
5	-	32	-	25	-	-	88
6	-	-	40	10	-	-	70
7	-	-	-	70	88	70	-

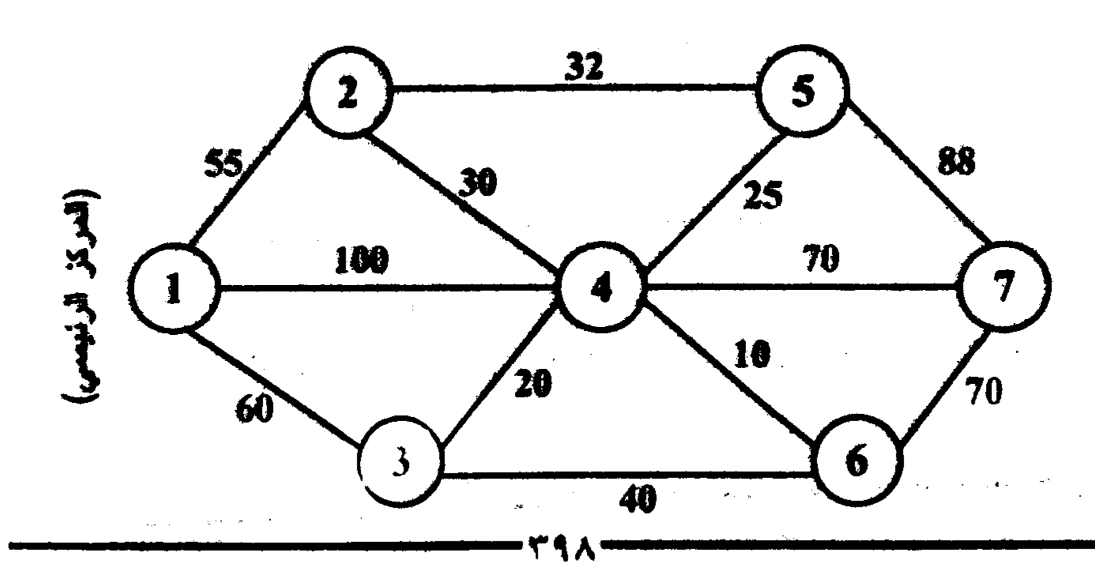
المطلوب :

١ - رسم شبكة الطرق بين المركز الرئيسي ومواقع العمل المختلفة .

٢ - تحديد الطرق أو المسارات التي من شأنها أن تقلل مسافة الانتقال من المركز الرئيسي إلى مواقع العمل المختلفة .

الحــل :

١ - يتم رسم شبكة الطرق كما يلي :



٢ - يتم تحديد أقصر طريق بالشبكة من المركز الرئيسي وهو الحدث رقم 1 (أي المصدر) إلى الموقع الأخير وهو الحدث رقم 7 (أي المصب) باستخدام الطريقة المذكورة من خلال الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

نكون جدولا أساسيا يشتمل على كل أحداث الشبكة (أي مواقع العمل) ونضع كل طريق أسفل حدث البداية الخاص به مع ترتيب الطرق ترتيباً تصاعديا من حيث طول الطريق ، مع مراعاة حذف الطريق (1-2) أسفل الحدث 2 والطريق (1-3) أسفل الحدث 3 والطريق (1-4) أسفل الحدث 4 وذلك لأن الحدث الثاني لهذه الطرق هو الحدث 1 الذي يمثل حدث البداية (أي المصدر) بالشبكة ، وللسبب نفسه تحذف جميع الطرق أسفل الحدث 7 وهي الطرق : (7-4) , (7-5) , (7-6) لأن الحدث الأول لهذه الطرق هو الحدث 7 والذي يمثل حدث النهاية (أي المصب) بالشبكة ، ثم نميز حدث البداية رقم 1 بنجمة ونرفق به القيمة صفر • ويتضح ذلك بالجدول التالي :

جدول (٥ ـ أ)

1*(0)	2	3	4	5	6	7
(1-2)=55	(2-4)=30	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	(2-5)=32	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
(1-4)=100	-	-	(4-7)=70	-	-	-

الخطوة 2 :

من الجدول (٥ ـ أ) يلاحظ أن أقصر طريق أسفل الحدث 1 هو الطريق (1-2) ، لذلك يحاط الطريق (1-2) بدائرة ثم نميز الحدث 2 بنجمة

ونرفق به طول هذا الطريق وهو القيمة 55 ثم نحذف من الجدول (ه – أ) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 2 ، وفي هذه الخطوة لا يوجد بالجدول طرق حدث النهاية لها هو الحدث 2 يمكن حذفها ، كما يتضح بالجدول التالي :

جدول (ه – ب)

1*(0)	2*(55)	3	4	5	6	7
(1-2)=55	(2-4)=30	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	(2-5)=32	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
(1-4)=100	-	-	(4-7)=70	-	-	-

الخطوة 3 :

حيث أن آخر حدث مميز بنجمة ليس هو الحدث 7 والذي يمثل حدث النهاية بالشبكة ، لذلك يتم الانتقال إلى الخطوة 4 .

الخطوة 4 :

تتضمن هذه الخطوة عادة عدد من الجولات على النحو التالي :

الجولة الأولى :

في الجدول (ه – ب) الأحداث المميزة بنجوم هما الحدثان 1 , 2 ، لذلك يتم جمع القيمة المرفقة بكل حدث من هذين الحدثين مع قيمة أقصر طريق غير محاط بدائرة أسفل الحدث كما يلي :

الحدث 1 : القيمة المرفقة بالحدث 1 + طول الطريق (1-3)

$$= 0 + 60 = 60$$

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + طول الطريق (2-4)

= 55 + 30 = 85

وحيث أن 60 هو المجموع الأصغر ، لذلك يميز الحدث 3 بنجمة وترفق به القيمة 60 ثم يحاط الطريق (3-1) بدائرة ، ويحذف من الجدول (٥ – ب) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 3 ، وفي هذه الخطوة لا توجد أيضاً طرق حدث النهاية لها هو الحدث 3 يمكن حذفها ، ويتضح ذلك في الجدول التالي :

جدول (٥ – جـ)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4	5	6	7
(1-2)=55	(2-4)=30	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	(2-5)=32	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
(1-4)=100	-	-	(4-7)=70	-	-	-

الجولة الثانية :

من الجدول (٥ – جـ) يلاحظ أن الأحداث التي تم تمييزها بنجوم هي الأحداث 1 , 2 , 3 ، حيث تجمع القيمة المرفقة بكل حدث من هذه الأحداث مع قيمة أقصر طريق غير محاط بدائرة أسفل هذا الحدث كما يلي :

الحدث 1 : القيمة المرفقة بالحدث 1 + طول الطريق (1-4)

= 0 + 100 = 100

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + طول الطريق (4-2)

= 55 + 30 = 85

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + طول الطريق (4-3)

= 60 + 20 = 80

وحيث أن 80 هو المجموع الأصغر ، لذلك نميز الحدث 4 بنجمة وترفق به القيمة 80 ثم يحاط الطريق (4-3) بدائرة ، ويحذف من الجدول (٥ – جـ) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 4 ، أي يتم حذف الطريق (4-1) الموجود أسفل الحدث 1 والطريق (4-2) الموجود أسفل الحدث 2 ونحصل على الجدول التالي :

جدول (٥ – د)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5	6	7
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	-	(3-6)=40	(4-5)=25	-	-	-
-	-	-	(4-7)=70	-	-	-

الجولة الثالثة :

من الجدول (٥ – د) الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 2 , 3 , 4 ، وبخصوص هذه الأحداث يكرر ما حدث في الجولتين الأولى والثانية كما يلي :

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + طول الطريق (2-5)

= 55 + 32 = 87

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + طول الطريق (3-6)

= 60 + 40 = 100

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + طول الطريق (4-6)

= 80 + 10 = 90

وحيث أن القيمة 87 هي المجموع الأصغر لذلك يميز الحدث 5 بنجمة ثم يحاط الطريق (2-5) بدائرة ويحذف من الجدول (٥ – د) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 5 ، أي يتم حذف الطريق (4-5) الموجود أسفل الحدث 4 ونحصل على الجدول التالي :

جدول (٥ – هـ)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5*(87)	6	7
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	-	(3-6)=40	(4-7)=70	-	-	-

الجولة الرابعة :

من الجدول (٥ – هـ) يلاحظ أن الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 3 , 4 , 5 ، نكرر بالنسبة لهذه الأحداث ما حدث بالجولات السابقة ، حيث نجد أن :

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + طول الطريق (3-6)

= 60 + 40 = 100

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + طول الطريق (4-6)

= 80 + 10 = 90

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + طول الطريق (5-7)

= 87 + 88 = 175

وحيث أن القيمة 90 هي المجموع الأصغر ، لذلك يتم تمييز الحدث 6 بنجمة وترفق به القيمة 90 ويحاط الطريق (4-6) بدائرة ثم يحذف من الجدول (٥ – هـ) كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 6 ، حيث يتم حذف الطريق (3-6) أسفل الحدث 3 ، وننتقل إلى الجدول (٥ – و) :

جدول (٥ – و)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5*(87)	6*(90)	7
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	(5-7)=88	(6-7)=70	-
(1-3)=60	-	-	(4-7)=70	-	-	-

الجولة الخامسة :

في الجدول (٥ – و) يلاحظ أن الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 4 , 5 , 6 ، وبخصوص هذه الأحداث يتم حساب ما يلي :

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + طول الطريق (7-4)

= 80 + 70 = 150

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + طول الطريق (7-5)

= 87 + 88 = 175

الحدث 6 : القيمة المرفقة بالحدث 6 + طول الطريق (7-6)

= 90 + 70 = 160

وحيث أن القيمة 150 هي المجموع الأصغر ، لذا يتم تمييز الحدث 7 بنجمة وترفق به القيمة 150 ، ويحاط الطريق (7-4) بدائرة ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 7 ، فيحذف الطريق (7-5) أسفل الحدث 5 والطريق (7-6) أسفل الحدث 6 ، كما يتضح من الجدول (٥ – ز) :

جدول (٥ – ز)

1*(0)	2*(55)	3*(60)	4*(80)	5*(87)	6*(90)	7*(150)
(1-2)=55	(2-5)=32	(3-4)=20	(4-6)=10	-	-	-
(1-3)=60	-	-	(4-7)=70	-	-	-

حيث أن جميع أحداث الشبكة قد تم تمييزها بنجوم ننتقل إلى الخطوة 5

الخطوة 5 :

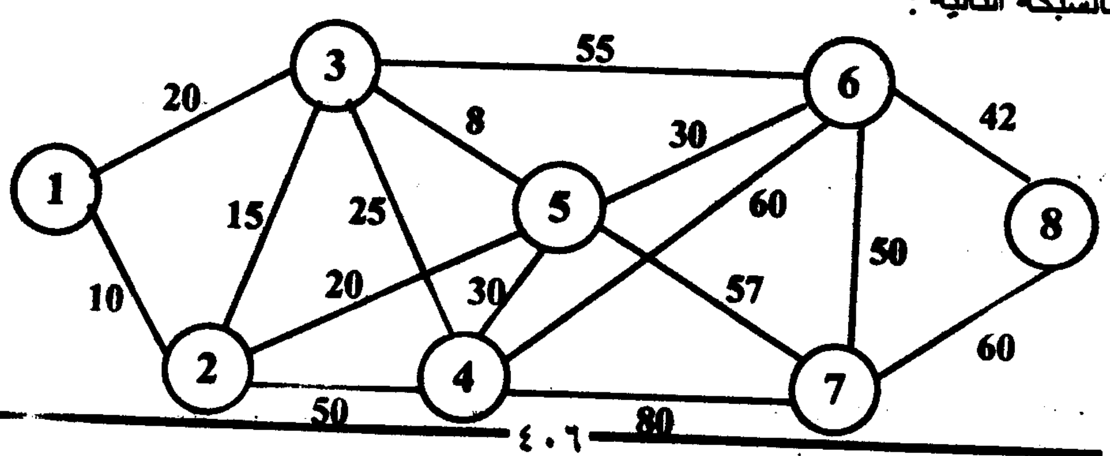
طول أقصر طريق من حدث البداية رقم 1 حتى حدث النهاية رقم 7 يساوي 150 كيلو متر ، وهو عبارة عن القيمة المرفقة بحدث النهاية رقم 7 . ولتحديد المسار الأمثل – وهو هنا الطريق الأقصر – فمن الشكل (٥ – ز) يحدد الطريق المحاط بدائرة وله الحدث 7 كحدث نهاية وهو الطريق (4-7) ، ثم يحدد بعد ذلك الطريق المحاط بدائرة ويكون حدث النهاية له هو الحدث 4 وهو الطريق (3-4) ، ويلي ذلك الطريق المحاط بدائرة ويكون حدث النهاية له هو الحدث 3 فيكون هو الطريق (1-3) ، وحيث أن الحدث 1 هو حدث البداية (أي المصدر) بالشبكة فيكون الطريق الأقصر من الحدث 1 إلى الحدث 7 هو :

(1-3) , (3-4) , (4-7)

وطوله يساوي 150 كيلو متر .

مثال (٦) :

مصنع لإنتاج السكر بمدينة نجع حمادي يقوم بنقل إنتاجه إلى سبع مدن أخرى فإذا كانت تكلفة نقل الطن (بالجنيه) بين كل أثنتين من المدن موضحاً بالشبكة التالية :



المطلوب :

١ - تحديد أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 8 .

٢ - تحديد أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 6 .

٣ - تحديد أقل الطرق تكلفة للنقل من المدينة 3 إلى المدينة 6 .

الحـل :

تستخدم طريقة التمييز لتحديد أقل الطرق تكلفة من خلال الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

نكون جدولا أساسيا يشتمل على ثمانية أحداث تمثل المدن المختلفة ونضع كل طريق أسفل حدث البداية الخاص به مع ترتيب الطرق ترتيبا تصاعديا من حيث تكلفة الانتقال باستخدام تلك الطرق ، مع حذف الطرق (2-1) , (3-1) أسفل الحدث 1 لأن حدث النهاية لها هو الحدث 1 والذي يمثل حدث البداية بالشبكة . بالمثل ، يتم حذف الطرق (6-8) , (7-8) أسفل الحدث 8 ، لأن حدث البداية لها هو الحدث 8 والذي يمثل حدث النهاية بالشبكة ، ثم يميز حدث البداية رقم 1 بنجمة وترفق به القيمة 0 ، ويأخذ الجدول الشكل التالي :

جدول (٦ – أ)

1*(0)	2	3	4	5	6	7	8
(1-2)=10	(2-3)=15	(3-5)=8	(4-5)=30	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	(2-5)=25	(3-4)=25	(4-6)=60	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
	(2-4)=50	(3-6)=55	(4-7)=80	-	-	-	-

الخطوة 2 :

أرخص الطرق أسفل الحدث 1 المميز بنجمة هو الطريق (1-2) فيحاط بدائرة ثم يميز الحدث 2 بنجمة وترفق به القيمة 10 ، ويحذف من الجدول كل الطرق الأخرى التي يمثل الحدث 2 حدث نهاية بالنسبة لها ، في هذه الجولة لا توجد طرق يمكن حذفها ، كما يتضح من جدول (٦ – ب) :

جدول (٦ – ب)

1*(0)	2*(10)	3	4	5	6	7	8
(1-2)=10	(2-3)=15	(3-5)=8	(4-5)=30	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	(2-5)=25	(3-4)=25	(4-6)=60	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
	(2-4)=50	(3-6)=55	(4-7)=80	-		-	-

الخطوة 3 :

حيث أن آخر حدث مميز بنجمة ليس هو الحدث رقم 8 والذي يمثل حدث النهاية بالشبكة ننتقل إلى الخطوة 4 ٠

الخطوة 4 :

تتضمن هذه الخطوة عدد من الجولات على النحو التالي :

الجولة الأولى :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر في الجدول (٦ – ب) هما الحدثان 1 ، 2 ٠ وبخصوص كل حدث منهما تحسب القيم التالية :

الحدث 1 : القيمة المرفقة بالحدث 1 + تكلفة الطريق (1-3)

= 0 + 20 = 20

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + تكلفة الطريق (2-3)

= 10 + 15 = 25

حيث أن القيمة 20 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يحاط النشاط (1-3) بدائرة ويميز الحدث 3 بنجمة وترفق به القيمة 20 ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي تكون نهايتها ممثلة بالحدث 3 ، حيث يتم حذف الطريق (2-3) أسفل الحدث 2 ، كما هو مبين في الجدول (٦ – جـ) :

جدول (٦ – جـ)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4	5	6	7	8
(1-2)=10	(2-5)=25	(3-5)=8	(4-5)=30	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	(2-4)=50	(3-4)=25	(4-6)=60	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
-	-	(3-6)=55	(4-7)=80	-	-	-	-

الجولة الثانية :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هما الحدثان 2 ، 3 . وبخصوص هذين الحدثين يلاحظ ما يلي :

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + تكلفة الطريق (2-5)

= 10 + 25 = 35

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + تكلفة الطريق (3-5)

= 20 + 8 = 28

وحيث أن القيمة 28 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يحاط الطريق (3-5) بدائرة ويميز الحدث 5 بنجمة وترفق به القيمة 28 ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 5 ، حيث يحذف الطريق (2-5) أسفل الحدث 2 والطريق (4-5) أسفل الحدث 4 كما يتضح من الجدول (٦ – د) :

جدول (٦ – د)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4	5*(28)	6	7	8
(1-2)=10	(2-4)=50	(3-5)=8	(4-6)=60	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	(4-7)=80	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
-	-	(3-6)=55	-	-	-	-	-

الجولة الثالثة :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 2 , 3 , 4 ، وبخصوص كل حدث من هذه الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 2 : القيمة المرفقة بالحدث 2 + تكلفة الطريق (2-4)

= 10 + 50 = 60

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + تكلفة الطريق (3-4)

= 20 + 25 = 45

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-6)

= 28 + 30 = 58

وكما هو واضح فإن القيمة 45 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يحاط الطريق (3-4) بدائرة ويميز الحدث 4 بنجمة وترفق به القيمة 45 ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي تنتهي بالحدث 4 ، حيث يحذف الطريق (2-4) أسفل الحدث 2 ، كما يتضح من الجدول (٦ – هـ) :

جدول (٦ – هـ)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6	7	8
(1-2)=10	-	(3-5)=8	(4-6)=60	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	(4-7)=80	(5-7)=57	(6-7)=50	-	-
-	-	(3-6)=55	-	-	-	-	-

الجولة الرابعة :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي الأحداث 3 , 4 , 5 ، وبخصوص كل حدث من هذه الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 3 : القيمة المرفقة بالحدث 3 + تكلفة الطريق (3-6)

= 20 + 55 = 75

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + تكلفة الطريق (4-5)

= 45 + 60 = 105

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-6)

= 28 + 30 = 58

حيث أن القيمة 58 تمثل المجموع الأصغر ، لذلك يميز الحدث 6 بنجمة وترفق به القيمة 58 ويحاط الطريق (5-6) بدائرة ، ثم تحذف كل الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 6 ، حيث يتم حذف الطريق (3-6) أسفل الحدث 3 والطريق (4-6) أسفل الحدث 4 كما هو مبين في الجدول (٦ – و) ٠

جدول (٦ – و)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6*(58)	7	8
(1-2)=10	-	(3-5)=8	(4-7)=80	(5-6)=30	(6-8)=42	(7-8)=60	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	-	(5-7)=80	(6-7)=50	-	-

الجولة الخامسة :

الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر في الجدول (٦ – و) هي الأحداث 4 , 5 , 6 ، وبخصوص تلك الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + تكلفة الطريق (4-7)

125 = 80 + 45 =

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-7)

108 = 80 + 28 =

الحدث 6 : القيمة المرفقة بالحدث 6 + تكلفة الطريق (6-8)

100 = 42 + 58 =

وحيث أن القيمة 100 هي المجموع الأصغر ، لذا يميز الحدث 8 بنجمة وترفق به القيمة 100 ويحاط الطريق (6-8) بدائرة ، ثم تحذف جميع الطرق الأخرى التي يكون حدث النهاية لها هو الحدث 8 ، حيث يتم حذف الطريق (7-8) أسفل الحدث 7 كما يتضح من الجدول (٦ – ز) ٠

جدول (٦ – ز)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6*(58)	7	8*(100)
(1-2)=10	-	(3-5)=8	(4-7)=80	(5-6)=30	(6-8)=42	-	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	-	(5-7)=80	(6-7)=50	-	-

الجولة السادسة :

من الجدول (٦ – ز) يلاحظ أن الأحداث المميزة بنجوم ويوجد أسفلها طرق غير محاطة بدوائر هي : 4 , 5 , 6 ، وبخصوص تلك الأحداث تحسب القيم التالية :

الحدث 4 : القيمة المرفقة بالحدث 4 + تكلفة الطريق (4-7)

= 45 + 80 = 125

الحدث 5 : القيمة المرفقة بالحدث 5 + تكلفة الطريق (5-7)

= 28 + 57 = 85

الحدث 6 : القيمة المرفقة بالحدث 6 + تكلفة الطريق (6-7)

= 58 + 50 = 108

وحيث أن 85 هو المجموع الأصغر ، لذلك يميز الحدث 7 بنجمة وترفق به القيمة 85 ويحاط الطريق (5-7) بدائرة ، ثم تحذف جميع الطرق الأخرى التي يمثل حدث النهاية لها الحدث 7 ، حيث يتم حذف الطريق (4-7) أسفل الحدث 4 ، والطريق (6-7) أسفل الحدث 6 ، ويتضح ذلك في الجدول التالي :

جدول (٦ – ح)

1*(0)	2*(10)	3*(20)	4*(45)	5*(28)	6*(58)	7*(85)	8*(100)
(1-2)=10	-	(3-5)=8	-	(5-6)=30	(6-8)=42	-	-
(1-3)=20	-	(3-4)=25	-	(5-7)=57	-	-	-

الخطوة 5 :

حيث أن جميع الأحداث بالشبكة أصبحت مميزة بنجوم نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ، ومن جدول الحل الأمثل الأخير – جدول (٦ – ح) يتم الإجابة على التساؤلات المطروحة كما يلي :

١ - أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 8 هو الطريق (6-8) ←ثم— (5-6) ←ثم— (3-5) ←ثم— (1-3) ، أي هو الطريق : (1-3) , (3-5) , (5-6) , (6-8) ، وأقل تكلفة نقل ممكنة خلال هذا الطريق تساوي 100 جنيه للطن الواحد ·

٢ - أقل الطرق تكلفة للنقل من المصنع بمدينة نجع حمادي إلى المدينة 6 هو الطريق (5-6) ←ثم— (3-5) ←ثم— (1-3) ، أي هو الطريق (1-3) , (3-5) ، (5-6) وأقل تكلفة نقل ممكنة خلال هذا الطريق للطن الواحد تساوي 58 جنيهاً ·

٣ - أقل الطرق تكلفة للنقل من المدينة 3 إلى المدينة 6 هو الطريق (5-6) ←ثم— (3-5) ، أي هو الطريق (3-5) , (5-6) وأقل تكلفة نقل للطن خلال هذا الطريق بين المدينتين 3 ، 6 تحسب كما يلي :

أقل تكلفة نقل من المدينة 3 إلى المدينة 6

= القيمة المرفقة بالحدث 6 - القيمة المرفقة بالحدث 3

= 58 - 20 = 38 جنيه للطن الواحد ·

(٥-٤) مشكلة اقصى تدفق The Maximal – Flow Problem

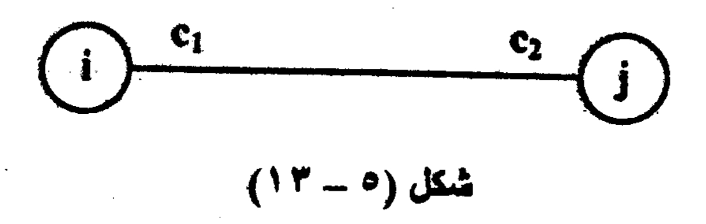
بفرض أنه توجد شبكة تدفق لها حدث بداية واحد يسمى بالمصدر Source Node ولها أيضاً حدث نهاية واحد يمثل نقطة الوصول أو المصب Sink Node ، فإن مشكلة أقصى تدفق تهتم بتحديد أقصى كمية تدفق (من السوائل أو الرسائل أو المركبات أو المسافرين ··· الخ) والتي يمكن أن ترسل

من حدث البداية حتى حدث النهاية بشبكة التدفق خلال مدة زمنية معينة وذلك في حدود طاقات النقل المتاحة لكل نشاط (وبالتالي لكل مسار) بالشبكة ٠

وسوف يفترض أن لكل نشاط بالشبكة طاقة استيعابية أو سعة معينة Arc Capacity ، وهي تمثل أقصى كمية تدفق يمكن أن تمر خلال هذا النشاط في وحدة الزمن ، فعلى سبيل المثال ، فإن كمية مياه الشرب التي يمكن أن تمر خلال ماسورة معينة في وحدة زمنية معينة سوف تكون محكومة بحجم الماسورة ولا يمكن أن تتعدى هذا الحجم ، كما أن عدد المركبات التي يمكن أن تمر خلال أحد الطرق في وحدة زمنية معينة لا يمكن أن تتعدى الطاقة الاستيعابية لهذا الطريق وهكذا ٠

وسوف يفترض أيضا أنه لا توجد طاقات (أو سعات) محددة بالنسبة لأحداث الشبكة ، وأن كمية التدفق التي تخرج من أي حدث بالشبكة (بخلاف حدثي البداية والنهاية) سوف تساوي كمية التدفق التي تدخل إليه ، بمعنى أنه لا يسمح بتخزين أي قدر من المواد المطلوب نقلها أو شحنها بأي حدث من هذه الأحداث ٠

وسوف يرتبط بكل نشاط $(i - j)$ بالشبكة طاقتين (أو سعتين) إحداهما توضع في بداية النشاط ويرمز لها بالرمز c_1 ، والأخرى توضع في نهاية النشاط ويرمز لها بالرمز c_2 ، كما يتضح من الشكل التالي :



شكل (٥ ــ ١٣)

حيث تشير السعة c_1 إلى أقصى كمية تدفق يمكن أن تمر خلال النشاط $(i - j)$ من الحدث i إلى الحدث j ، بينما تشير السعة c_2 إلى أقصى كمية تدفق يمكن أن تمر خلال النشاط $(i - j)$ في الاتجاه المضاد ، أي من الحدث j إلى الحدث i .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان أحد الشوارع $(i - j)$ في مدينة الزقازيق والمسموح بالمرور فيه في اتجاهين تم تمثيله بيانياً ضمن شبكة النقل بالمدينة حسب طاقات الشوارع (بالألف مركبة في الساعة) كما يلي :

i —5————————3— j

فيعني ذلك أن أقصي عدد من المركبات يمكن أن يمر بالشارع من الحدث i إلى الحدث j هو 5000 مركبة في الساعة ، بينما أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر بنفس الشارع من الحدث j إلى الحدث i هو 3000 مركبة في الساعة (قد يكون ذلك راجعاً إلى اختلاف عدد حارات المرور في كل من الاتجاهين بالشارع) .

أما إذا تم تمثيل الشارع $(p - q)$ في شبكة النقل كما يلي :



فيعني ذلك أن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من النقطة p إلى النقطة q هو 4000 مركبة في الساعة ، وغير مسموح بمرور أي مركبة من النقطة q إلى النقطة p (وهذا يعني أن المرور بهذا الشارع في اتجاه واحد فقط من p إلى q) .

وبالرغم من أن مشكلة أقصى تدفق يمكن صياغتها كنموذج برمجة خطية وبالتالي يتم حلها باستخدام طريقة السمبلكس ، إلا أن هناك طرق خاصة بأساليب التحليل الشبكي أكثر سهولة من طريقة السمبلكس تمكن من التوصل إلى أقصى كمية تدفق بالشبكة بشكل مباشر ·

طريقة تحديد اقصى كمية تدفق A Maximal - Flow Method

لعل أول من قدم طريقة لتحديد أقصى كمية تدفق خلال الشبكة هما العالمان فورد وفولكرسون عام ١٩٦٢ في مؤلفهما الشهير " التدفق في الشبكات "(*)، وتتضمن هذه الطريقة عدد من الجولات ، كل جولة من هذه الجولات تتكون من مجموعة الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

يتم بشكل عشوائي اختيار أي مسار بالشبكة من حدث البداية (المصدر) إلى حدث النهاية (المصب) بحيث يستوعب هذا المسار كمية تدفق موجبة لكل الأنشطة المكونة لهذا المسار ، فإذا لم يعد يوجد مثل هذا المسار نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ·

الخطوة 2 :

تتحدد أقصى كمية تدفق يمكن أن تنقل خلال هذا المسار على أنها تساوي أقل طاقة استيعابية (أو سعة) للأنشطة المكونة لهذا المسار ولنرمز لها بالرمز f_1 ·

(*) Ford, L., and Fulkerson, D., **Flows in Networks**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

الخطوة 3 :

تزيد كمية التدفق خلال الشبكة بإرسال الكمية f_1 في المسار الذي تم اختياره في الخطوة 1 ، ويتم ذلك من خلال تخفيض طاقة التدفق (باتجاه أمامي من المصدر إلى المصب) لكل نشاط من أنشطة هذا المسار بمقدار f_1 وزيادة طاقة التدفق العكسية (باتجاه عكسي من المصب إلى المصدر) بنفس القدر f_1 ، ويعني ذلك أن طاقة التدفق لأحد أنشطة هذا المسار (وهو النشاط الذي له أقل طاقة تدفق ، f_1) سوف تساوي الصفر ، وهذا يعني إلغاء هذا النشاط أو الخط من الشبكة واعتباره كأن لم يكن ٠ ثم نضيف f_1 وحدة إلى كمية التدفق المسلمة إلى المصب (أو حدث النهاية بالشبكة) ٠

الخطوة 4 :

نعيد رسم شبكة التدفق مع مراعاة التعديلات التي تمت في الخطوة 3 ٠

الخطوة 5 :

تكرر الخطوات من الخطوة 1 حتى الخطوة 4 في كل جولة من جولات الحل ، ويعتبر الحل منتهياً إذا لم يعد بالشبكة أي مسار من حدث البداية (المصدر) إلى حدث النهاية (المصب) يستوعب تدفق موجب في الاتجاه الأمامي (أي من المصدر إلى المصب) ٠

الخطوة 6 :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تشحن من حدث البداية (المصدر) إلى حدث النهاية (المصب) تكون عبارة عن إجمالي كميات التدفق المسلمة إلى المصب ، حيث :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تشحن من المصدر إلى المصب هي :

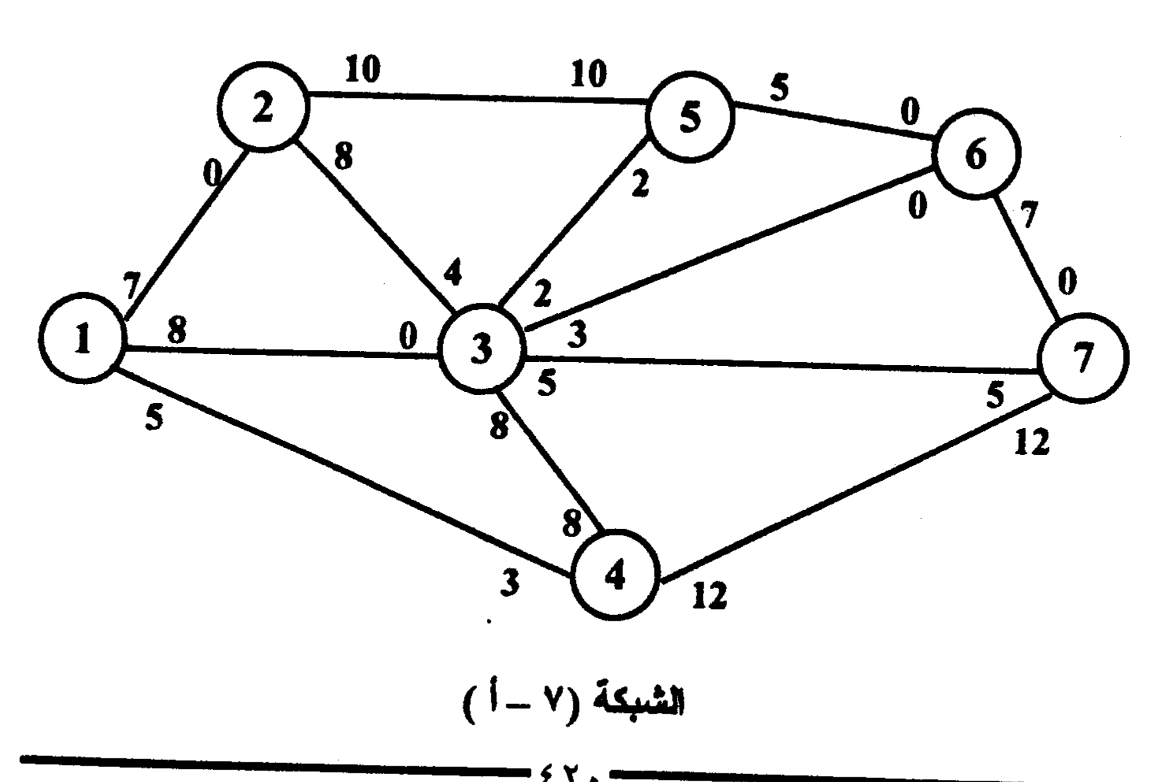
$$\sum_{i=1}^{d} f_i$$

حيث d تشير إلى عدد جولات الحل ·

وبالرغم من أن عدد جولات الحل في هذه الطريقة سوف تختلف باختلاف ترتيب المسارات التي يتم اختيارها في الخطوة 1 من كل جولة ، إلا أنها سوف تعطي في النهاية نفس قيمة الحل الأمثل ·

مثال (٧) :

إذا كانت شبكة الطرق داخل مدينة الزقازيق موضحاً بها طاقات التدفق لكل طريق من أعداد المركبات (بالألف) في الساعة في كلا الاتجاهين بجوار بداية ونهاية كل نشاط كما هو موضح بالشبكة (٧ – أ)



الشبكة (٧ – أ)

فعلى سبيل المثال ، بالنسبة للطريق (2-1) فإن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من الحدث 1 إلى الحدث 2 هو 7 آلاف مركبة في الساعة ، ولكن غير مسموح بمرور أي مركبة من الحدث 2 إلى الحدث 1 ، أما الطريق (4-1) مثلاً ، فإن أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من الحدث 1 إلى الحدث 4 هو 5 آلاف مركبة في الساعة ، بينما أقصى عدد من المركبات يمكن أن يمر من الحدث 4 إلى الحدث 1 هو 3 آلاف مركبة في الساعة ، وهكذا ٠

المطلوب :

تحديد أقصى كمية تدفق من المركبات في الساعة يمكن أن تمر من حدث البداية رقم 1 (أي المصدر) إلى حدث النهاية رقم 7 (أي المصب) ٠

الحــل :

يتم تطبيق طريقة فورد وفولكرسون للحصول على أقصى كمية تدفق من المركبات من الحدث 1 إلى الحدث 7 من خلال الجولات التالية :

الجولة الأولى :

تتضمن مجموعة الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

يتم اختيار أي مسار من مسارات الشبكة بشكل عشوائي من الحدث 1 حتى الحدث 7 وليكن المسار [(1-2) , (2-3) , (3-7)] ٠

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تنقل خلال هذا المسار تحسب كما يلي :

أقصى كمية تدفق

= الأقل من { طاقة الطريق (2-1) , طاقة الطريق (3-2) , طاقة الطريق (7-3) } في الاتجاه الأمامي

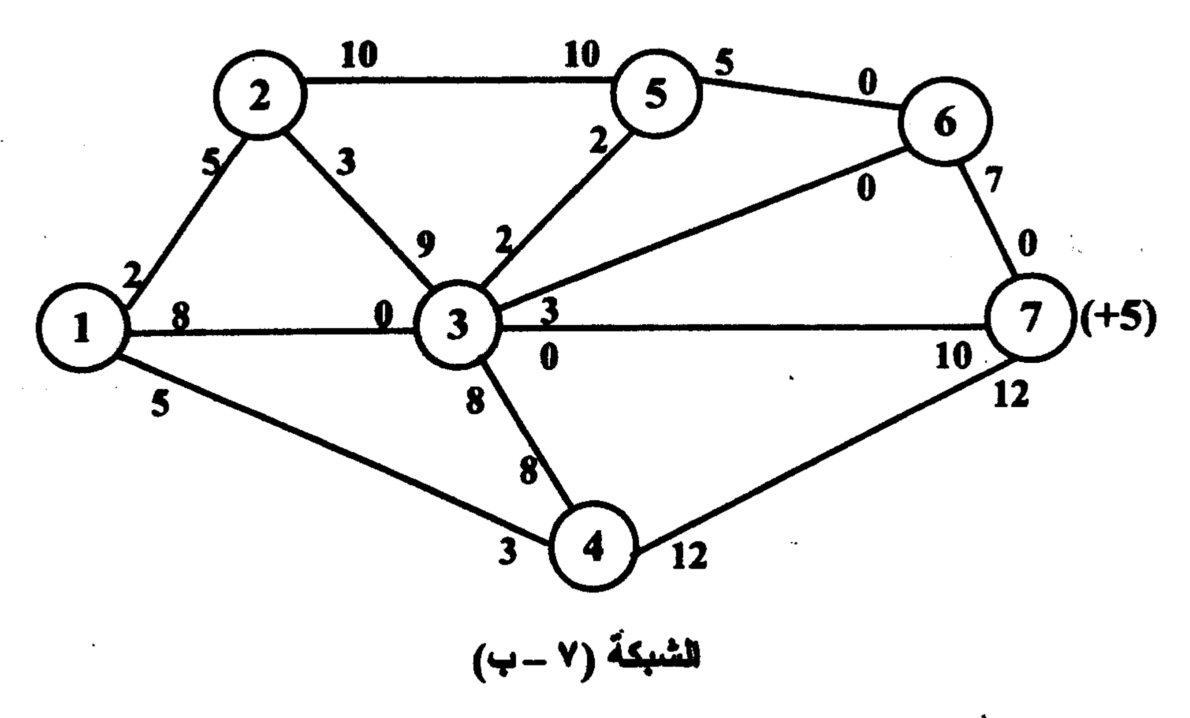
= الأقل من { 5 , 8 , 7 } = 5

الخطوة 3 :

يتم شحن هذا العدد من المركبات إلى حدث النهاية 7 ، أي تسلم 5 وحدات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (2-1) , (3-2) , (7-3) بـ 5 وحدات ، وتزداد طاقات الطرق (1-2) , (2-3) , (3-7) بـ 5 وحدات ، بعد هذه الجولة تصبح الطاقة المتاحة للطريق (7-3) مساوية للصفر وبالتالي يمكن حذفه من الشبكة أو اعتباره كأن لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات السابقة كما يتضح من الشبكة (٧ – ب)



الشبكة (٧ – ب)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد مسارات أخرى بالشبكة تستوعب تدفق موجب من حدث البداية 1 إلى حدث النهاية 7 ، فننتقل إلى الجولة التالية للحل .

الجولة الثانية :

الخطوة 1 :

يتم اختيار مسار آخر من مسارات الشبكة (٧ – ب) بشكل عشوائي وليكن المسار [(7-4) , (4-3) , (3-1)] .

الخطوة 2 :

أقصى تدفق خلال هذا المسار

= الأقل من { طاقة الطريق (3-1) , طاقة الطريق (4-3) , طاقة الطريق (7-4) }

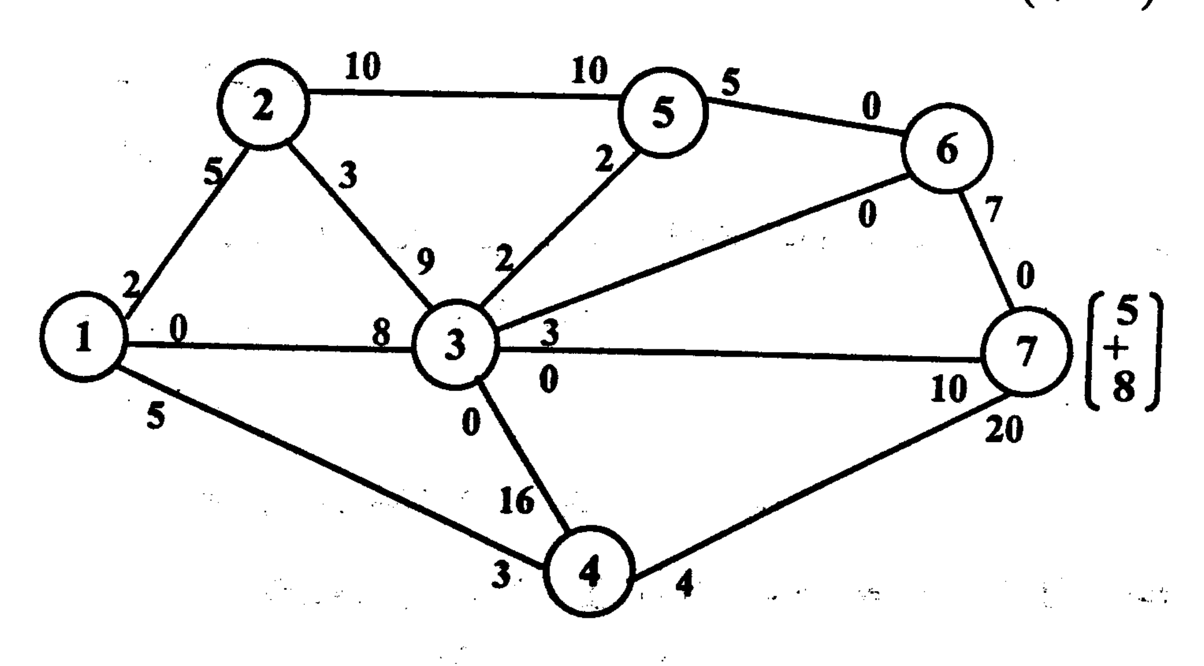
= الأقل من { 12 , 8 , 8 } = 8 ٠

الخطوة 3 :

يتم شحن هذا العدد من المركبات إلى حدث النهاية 7 ، أي نسلم 8 وحدات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (1-3) , (3-4) , '(4-7) بـ 8 وحدات ، وتزاد طاقات الطرق (3-1) , (4-3) , (7-4) بـ 8 وحدات ، ويلاحظ أن الطاقة المتاحة لكل من الطريقين (1-3) , (3-4) سوف تصبح مساوية للصفر ، ومن ثم يمكن حذف كل منهما أو اعتبار كل منهما كأن لم يكن ٠

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل هذه التعديلات كما يتضح من الشبكة (٧ – جـ) ٠



الشبكة (٧ – جـ)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد مسارات أخرى بالشبكة تستوعب تدفق موجب من الحدث 1 حتى الحدث 7 ، لذا يتم الانتقال إلى الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

الخطوة 1 :

يختار بشكل عشوائي مسار آخر من مسارات الشبكة الموضحة بالشبكة (٧ – جـ) يستوعب تدفق موجب وليكن المسار [(7-4) , (4-1)] .

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار

= الأقل من { طاقة الطريق (4-1) , طاقة الطريق (7-4) }

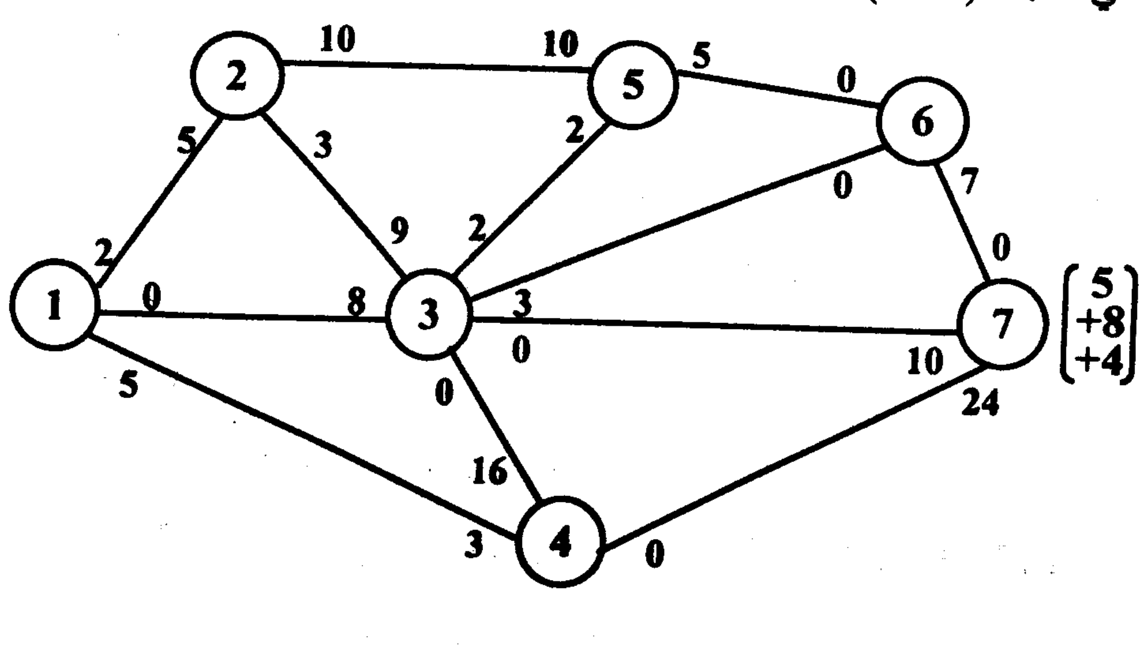
= الأقل من { 4 , 5 } = 4

الخطوة 3 :

يشحن 4 وحدات من المركبات من الحدث 1 إلى الحدث 7 ، أي يسلم 4 وحدات الى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (4-1) , (7-4) بمقدار 4 وحدات ، وتزداد طاقات الطرق (1-4) , (4-7) بمقدار 4 وحدات ، حيث تصبح طاقة الطريق (7-4) مساوية للصفر ويعتبر هذا الطريق كأن لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات الواردة في الخطوة 3 كما يتضح في الشبكة (٧ – د) •



الشبكة (٧ – د)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد مسارات أخرى بالشبكة تستوعب تدفق موجب من الحدث 1 إلى الحدث 7 ، لذلك يتم الانتقال إلى الجولة التالية •

الجولة الرابعة :

الخطوة 1 :

نختار بشكل عشوائي مسار آخر من مسارات الشبكة الموضحة بالشبكة (٧ – د) يستوعب تدفق موجب وليكن المسار

[(1-2) , (2-5) , (5-6) , (6-7)]

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق خلال المسار المذكور

= الأقل من { طاقة الطريق (2-1) , طاقة الطريق (5-2) , طاقة الطريق (6-5) , طاقة الطريق (7-6) }

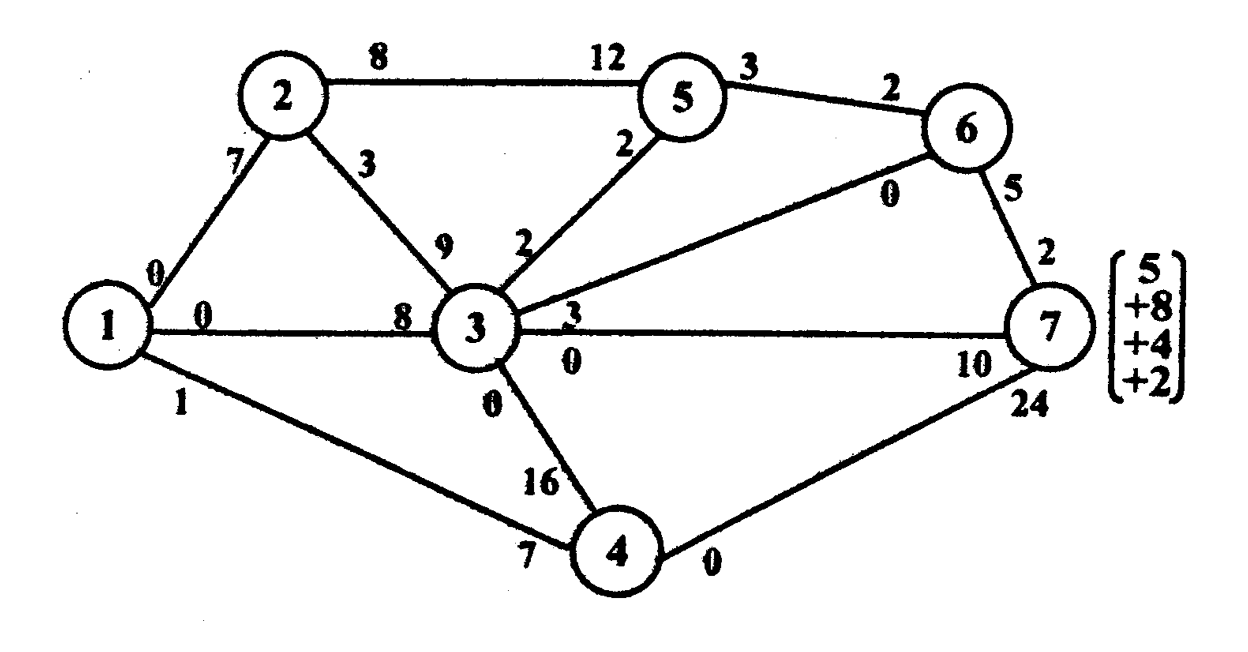
= الأقل من { 2 , 10 , 5 , 7 } = 2

الخطوة 3 :

يشحن وحدتين من المركبات من الحدث 1 إلى الحدث 7 ، بمعنى أن يسلم عدد 2 وحدة من المركبات إلى الحدث 7 ، وتخفض طاقات الطرق (1-2) , (2-5) , (5-6) , (6-7) بمقدار 2 وحدة ، وتزداد طاقات الطرق (2-1) , (5-2) , (6-5) , (7-6) بمقدار 2 وحدة ، وسوف تصبح طاقة الطريق (1-2) بعد عمل هذه التعديلات مساوية للصفر ، ومن ثم يعتبر هذا الطريق كأن لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات الواردة في الخطوة 3 من هذه الجولة كما يتضح من الشبكة (٧ – هـ) .



الشبكة (٧ – هـ)

الخطوة 5 :

بالنظر إلى الشبكة (٧ – هـ) يلاحظ أنه لم يعد يوجد بها أية مسارات تستوعب تدفق موجب من الحدث 1 حتى الحدث 7 ، وثم يكون قد تم التوصل إلى الحل الأمثل وهو :

أقصى كمية تدفق من المركبات يمكن أن ترسل من الحدث 1 إلى الحدث 7 بشبكة الطرق المبينة تساوي 19 ألف مركبة في الساعة ٠

ويمكن عرض جدول الشحن الأمثل بشكل تفصيلي على النحو التالي :

الجولة الأولى:
- شحن 5 آلاف مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 2
- شحن 5 آلاف مركبة من الحدث 2 إلى الحدث 3
- شحن 5 آلاف مركبة من الحدث 3 إلى الحدث 7

الجولة الثانية
- شحن 8 الاف مركبه من الحدث 1 إلى الحدث 3
- شحن 8 آلاف مركبة من الحدث 3 إلى الحدث 4
- شحن 8 آلاف مركبة من الحدث 4 إلى الحدث 7

الجولة الثالثة
- شحن 4 آلاف مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 4
- شحن 4 آلاف مركبة من الحدث 4 الى الحدث 7

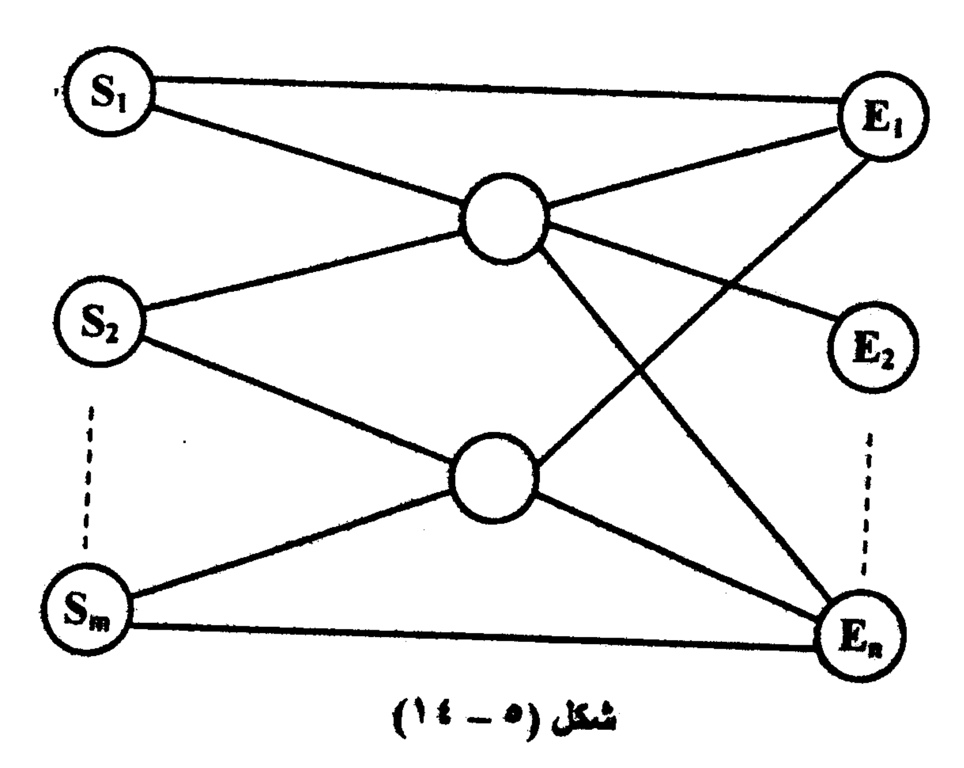
الجولة الرابعة
- شحن ألفين مركبة من الحدث 1 إلى الحدث 2
- شحن ألفين مركبة من الحدث 2 إلى الحدث 5
- شحن ألفين مركبة من الحدث 5 إلى الحدث 6
- شحن ألفين مركبة من الحدث 6 إلى الحدث 7

مشكلة أقصى تدفق في حالة تعدد المصادر والمصبات

أوضحنا فيما سبق معالجة شبكات التدفق في حالة ما إذا كانت الشبكة تحتوى على حدث بداية (أي مصدر) واحد وحدث نهاية (أي مصب) واحد ، ولكن قد يحدث في بعض الأحيان أن تتضمن شبكة التدفق عدداً من أحداث البداية (المصادر) Source Nodes ، وعددا من أحداث النهاية (المصبات) Sink Nodes ، ويظهر ذلك في بعض أنواع شبكات التدفق وأيضاً في حاله نموذج النقل والذي يشتمل بالطبع على عدد من مصادر العرض وعدد من جهات الإستخدام ونرغب في إعادة صياغة نموذج النقل في صورة شبكة تدفق .

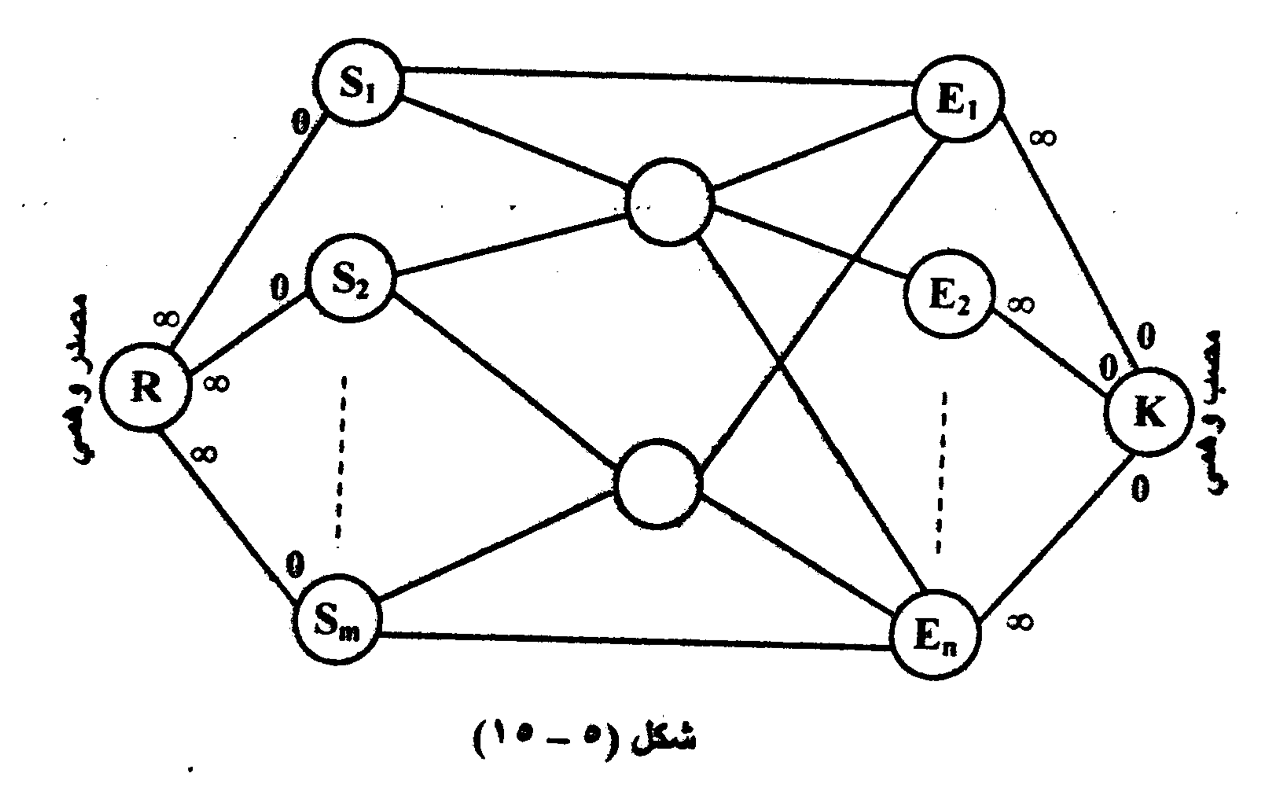
أولاً : شبكات التدفق ذات المصادر المتعددة والمصبات المتعددة

إذا كان هناك شبكة تدفق تتضمن عدد m من المصادر ، عدد n من المصبات ، حيث : $n \geq 2 , m \geq 2$ ، كما يتضح من الشكل التالي :



شكل (٥ – ١٤)

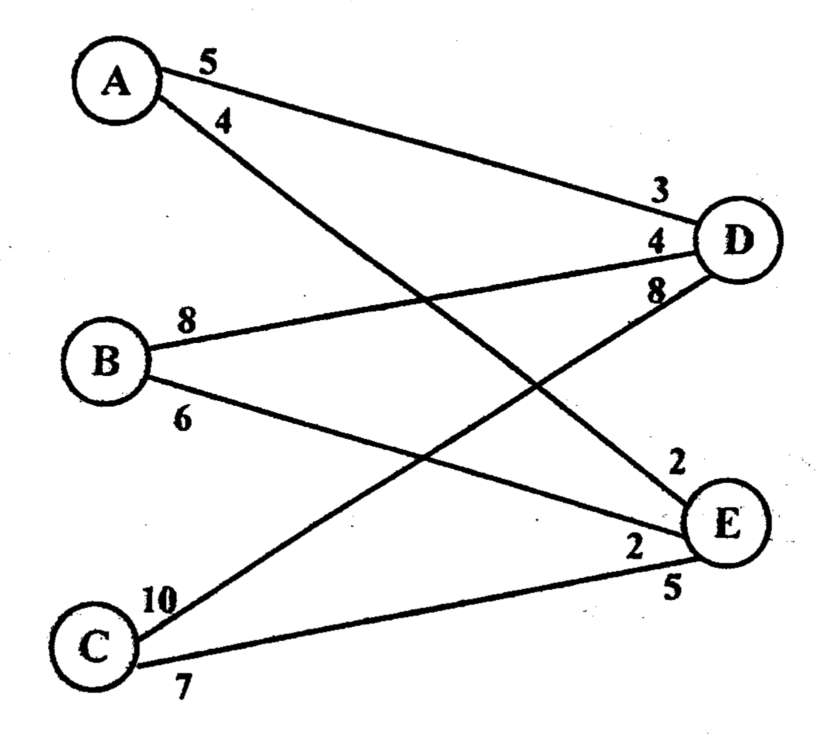
لتحديد أقصى كمية تدفق يمكن شحنها من المصادر إلى المصبات فيتعين أن يكون للشبكة حدث بداية (أي مصدر) واحد وحدث نهاية (أي مصب) واحد ويتم ذلك عن طريق إدخال مصدر وهمي Dummy Source وتوصيله بالمصادر الرئيسية بالشبكة بأنشطة (أو خطوط) طاقة التدفق لكل منها تساوي مالانهاية ، وإدخال مصب وهمي Dummy Sink وتوصيل المصبات الرئيسية بالشبكة بهذا المصب الوهمي بأنشطة (أو خطوط) طاقة التدفق لكل منها تساوي مالانهاية وبذلك تتحول شبكة التدفق إلى شبكة ذات مصدر واحد ومصب واحد كما يتضح من الشكل التالي :



شكل (٥ ــ ١٥)

مثال (٨) :

شركة للنقل الجماعي تقوم بنقل الركاب من مدن الإسماعيلية والزقازيق والمنصورة والتي يرمز لها بالرموز C , B , A على الترتيب ، إلى مدينتي القاهرة والأسكندرية واللتين يرمز لهما بالرمزين D , E على الترتيب ، والعكس (أي من المدينتين E , D إلى المدن C , B , A) ٠ وتستخدم في ذلك وسائل نقل مختلفة في سعتها وتجهيزاتها وكانت الطاقة القصوى لنقل الركاب (بالمائة راكب) في الساعة بوسائل النقل المختلفة في كلا الاتجاهين كما هو موضح بالشبكة التالية :

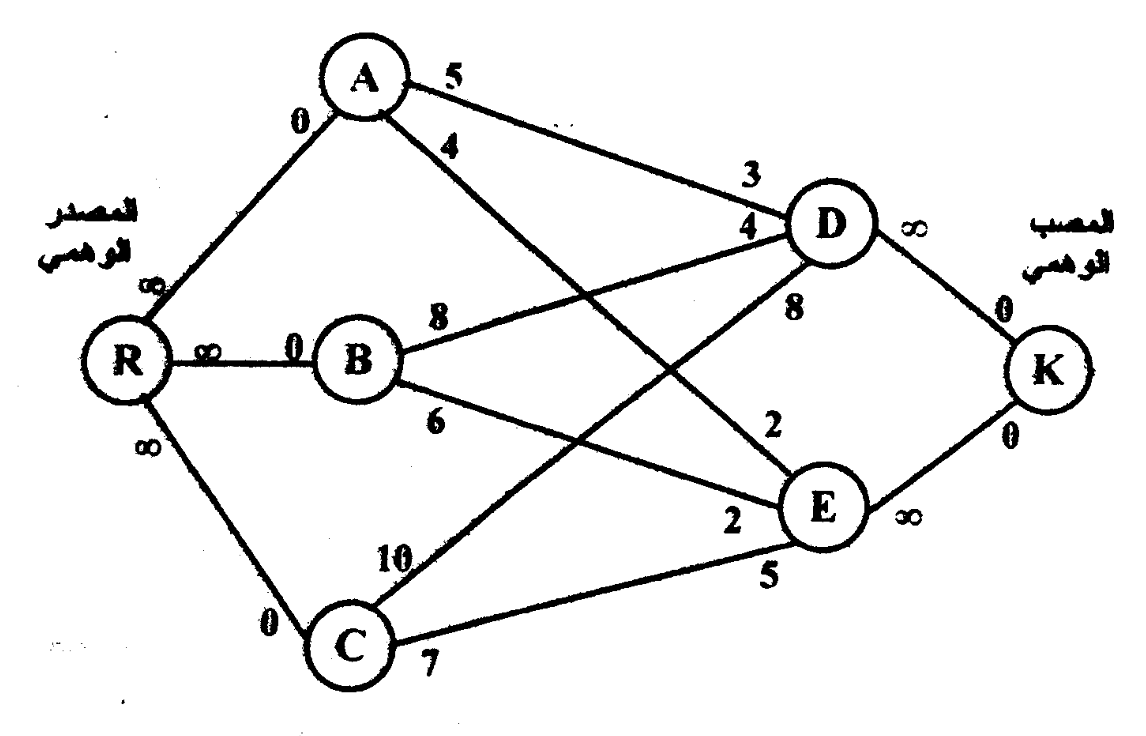


المطلوب :

تحـديد أقصـى كمية تدفق من الركاب في السـاعة يمكن نقلها من المدن C , B , A إلى المدينتين D ، E .

الحـــل :

حيث أن شبكة النقل تتضمن ثلاثـة مصادر ومصبين ، لذا يتعين إضافة مصـدر وهمي يرمز له بالرمز R وتوصيله بالمصادر الثلاث الرئيسية بأنشطة الطاقة القصوى لكل منها في الاتجاه الأمامي تساوي مالانهاية ، وفي الاتجاه العكسي تساوي صفر وأيضاً إضافة مصب وهمي يرمز له بالرمز K وتوصيل كل من المصبين الرئيسيين بالمصب الوهمي بنشاطين الطاقة القصوى لكل منهما في الاتجاه الأمامي تساوي مالانهاية ، وفي الاتجاه العكسي تساوي صفر ، كما يتضح من الشبكة (٨ – أ) :



الشبكة (٨ – أ)

للحصـول علـى أقصـى كمـية من الركاب من الحدث R إلى الحدث K يتم ذلك من خـلال عدة جولات ٠ وسوف نعرض منها الجولة الأولى بالتفصيل ونترك باقي الجولات للقارئ كي يجريها بنفسه على سبيل التدريب ٠

الجولة الأولى :

تتضمن مجموعة الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

يتم اختـيار أي مسـار من مسارات الشبكة بشكل عشوائي من الحدث R حتى الحدث K وليكن المسار [(R-B) , (B-D) , (D-K)] ٠

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق يمكن أن تنقل خلال هذا المسار تحسب كما يلي :

أقصى كمية تدفق

= الأقل من { طاقة النشاط (R-B) , طاقة النشاط (B-D) ; طاقة النشاط (D-K) }

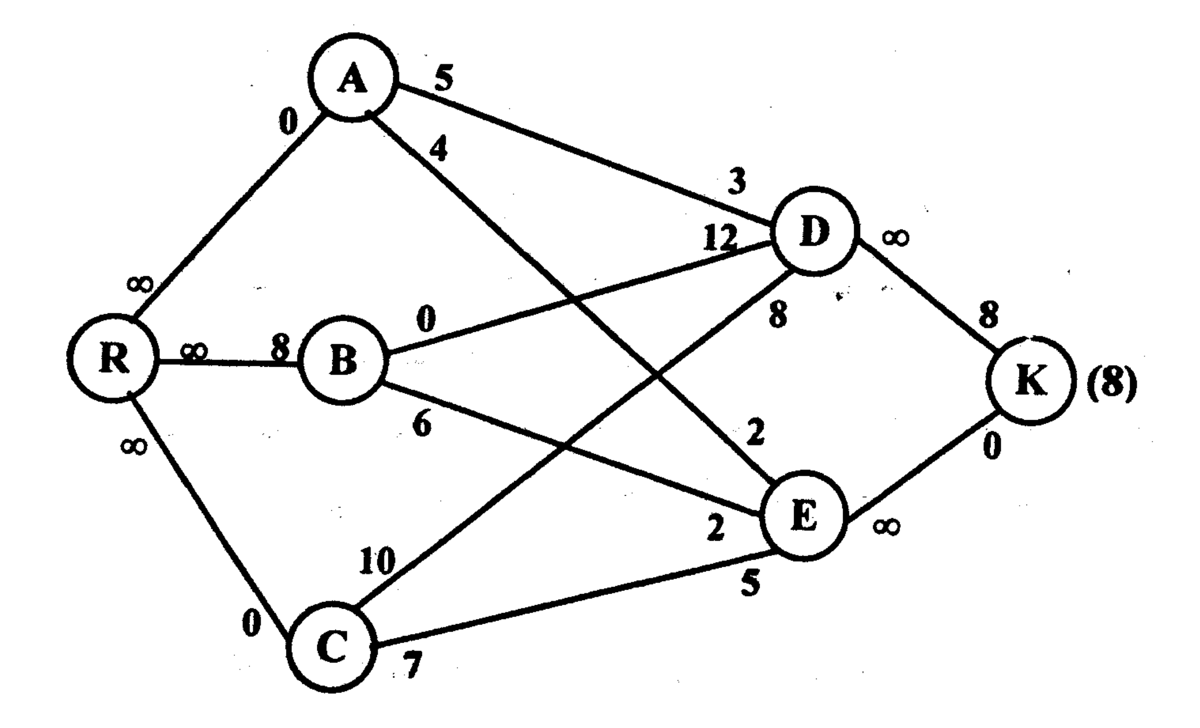
= الأقل من { ∞ , 8 , ∞ } = 8

الخطوة 3 :

يتم شحن العدد 8 من الحدث R إلى الحدث K ، أي يسلم 8 وحدات إلى الحدث K ، وتنخفض طاقات الأنشطة (R-B) , (B-D) , (D-K) بـ 8 وحدات ، وتزداد طاقات الأنشطة (B-R) , (D-B) , (K-D) بـ 8 وحدات وبعد ذلك سوف تصبح الطاقة المتاحة للنشاط (B-D) مساوية للصفر وبالتالي يمكن حذف هذا النشاط من الشبكة أو اعتباره كأن لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات المذكورة في الخطوة السابقة كما هو موضح بالشبكة (٨ – ب) .



الشبكة (٨ – ب)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زالت توجد بالشبكة مسارات أخرى تستوعب تدفق موجب من المصدر R إلى المصب K ، فننتقل إلى الجولة الثانية فالثالثة وهكذا ، تستمر جولات الحل وفي كل جولة نعيد الخطوات الخمسة سالفة الذكر حتى يتم التوصل إلى أقصى كمية تدفق من الركاب يمكن إرسالها من المصدر R إلى المصب K والتي سوف تساوي 40 وحدة في الساعة (أي $40 \times 100 = 4000$) راكب في الساعة .

ثانياً : نموذج النقل وتحويله إلى شبكة تدفق

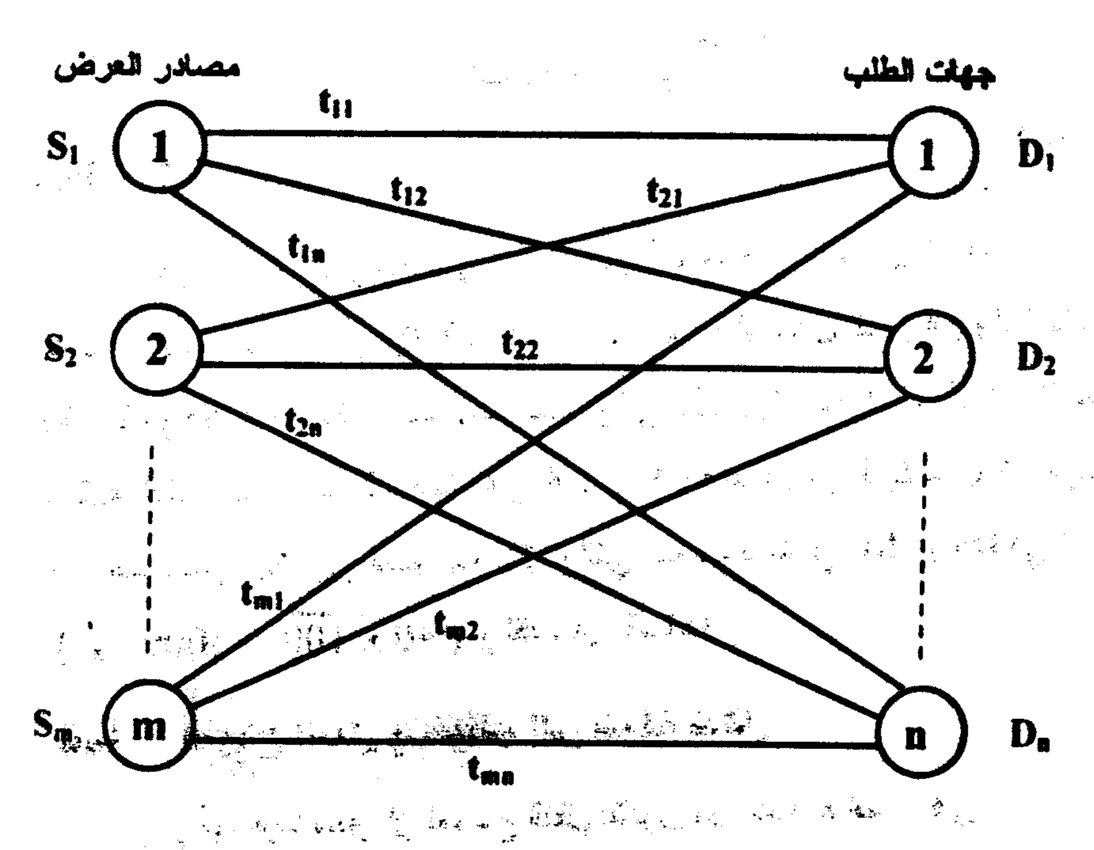
رأينا فيما سبق أن نموذج النقل يتكون من عدة عناصر هي :

أ - عدد m من مصادر العرض التي يتوفر لدى كل منها S_i (حيث $i = 1,2, \ldots , m$) من الكميات المتاحة من السلعة ٠

ب - عدد n من جهات الطلب والتي يبلغ احتياج كل منها من السلعة D_j (حيث $j = 1 , 2 , \ldots , n$) ٠

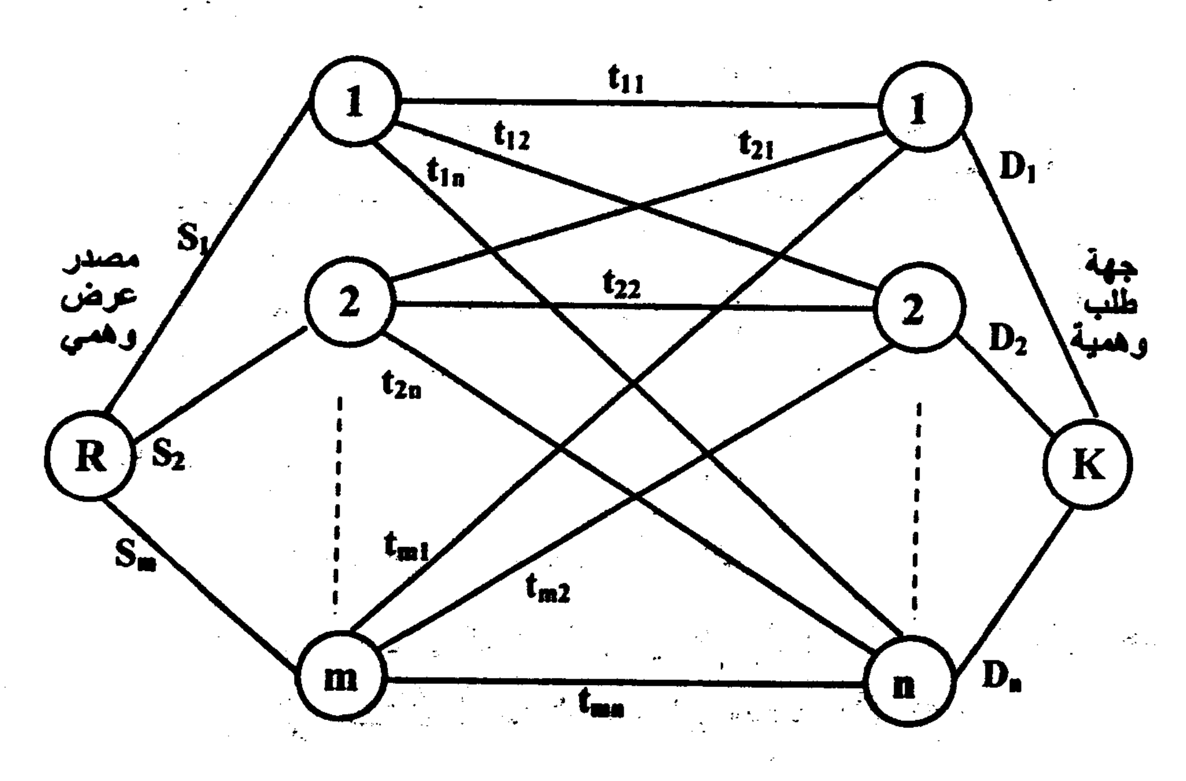
جـ - المتغير t_{ij} (حيث $i = 1, 2, \ldots , m$; $j = 1 , 2 , \ldots , n$) والذي يمثل تكلفة نقل الوحدة (أو الربح المتحقق من نقل الوحدة أو الكمية التي يتم شحنها من السلعة في وحدة الزمن ٠٠٠ الخ) من المصدر i إلى جهة الطلب j ٠

ويمكن تمثيل عناصر نموذج النقل بيانياً بالشكل التالي :



شكل (٥ ـ ١٦)

فإذا كان المطلوب هو إيجاد أقصى كمية من السلعة يمكن شحنها من مصادر العرض إلى جهات الطلب فيفضل في هذه الحالة تحويل نموذج النقل السابق إلى شبكة تدفق متعددة المصادر ومتعددة المصبات ، ويلزم بطبيعة الحال تحويلها إلى شبكة تدفق لها مصدر واحد ومصب واحد ، ويتم ذلك عن طريق إضافة مصدر عرض وهمي ونصل بين هذا المصدر الوهمي ومصادر العرض المختلفة بأنشطة طاقة التدفق لها هي الكميات المعروضة في مراكز العرض ، أي $S_i , (i = 1, 2, \dots , m)$ ، ثم إضافة جهة طلب وهمية ونصل بين جهات الطلب المختلفة وهذا المصب الوهمي بأنشطة طاقة التدفق لها هي الكميات المطلوبة في جهات الطلب ، أي $D_j , (j = 1 , 2 , \dots , n)$ ، كما يتضح من الشكل (٥ – ١٧) ٠



شكل (٥ – ١٧)

ويمكن استخدام طريقة فورد وفولكرسون للحصول على أقصى كمية تدفق يمكن شحنها من المصدر R إلى المصب K ٠

مثال (٩) :

بفرض أن شركة لديها مزرعتين للأسماك يرمز لهما بالرمزين B , A، طاقتهما الإنتاجية السنوية من الأسماك (بالألف طن) هي على الترتيب 35 ، 25 ٠ وترغب الشركة في تصدير إنتاجها إلى ثلاث مراكز استيراد يرمز لها بالرموز E , D , C ، وتبلغ احتياجاتها السنوية القصوى من الأسماك (بالألف طن) ، على الترتيب : 28 , 17 , 15 ٠

وبفرض أن عملية التصدير تتم بوسائل نقل ذات حمولات مختلفة (بالألف طن) كما هو مبين بالجدول التالي :

مركز الاستيراد / المزرعة	C	D	E
A	5	3	8
B	10	7	9

المطلوب :

١ - تحويل نموذج النقل إلى شبكة تدفق ٠

٢ - إيجاد أقصى كمية تدفق من الأسماك (بالألف طن) يمكن شحنها في وحدة الزمن من المصدر إلى المصب بالشبكة ٠

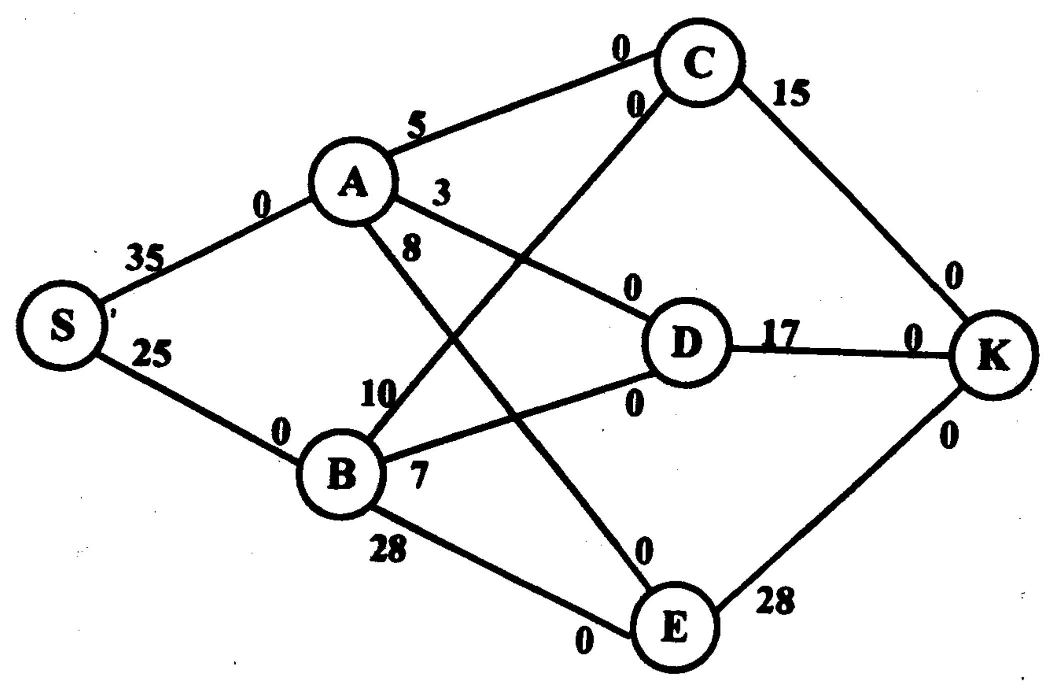
الحـــل :

يمكن عـرض نمـوذج الـنقل بعـد إضـافة الطاقـات الإنتاجـية القصـوى للمزارع والاحتياجات القصوى لمراكز الاستيراد إلى مصفوفة الشحن كما يلي :

مركز الاستيراد / المزرعة	C	D	E	إجمالي العرض
A	5	3	8	35
B	10	7	9	25
إجمالي الطلب	15	17	28	

١ - لـتحويل نمـوذج الـنقل إلـى شـبكة تدفق تضـاف مـزرعة وهمية يرمز لهـا بالرمز S ، ونصل بين هذا المصدر الوهمي وبين المزرعتين السمكيتين بنشـاطين همـا : (S-A) , (S-B) ، وطاقة التدفق القصوى لهما هي على الترتيب : 35 ، 25 ، ويضاف أيضاً مركز استيراد وهمي (أي مصب وهمي) يرمز له بالرمز K ، ونصل بين مراكز الاستيراد وبين المصب الوهمي بأنشطة هي : (C-K) , (D-K) , (E-K) طاقة التدفق القصوى لها هي على الترتيب : 15 , 17 , 28 .

وحيث أنـه غير مسموح بالشـحن فـي الاتجـاه المضـاد (أي من مركز الاستيراد إلى مركز التصدير) فسوف يوضع في نهاية كل نشاط من أنشطة الشبكة القيمة صفر ، ويتضح ذلك في شبكة التدفق التالية :



الشبكة (٩ – أ)

للحصول على أقصى كمية تدفق من الأسماك من الحدث S إلى الحدث K يتم ذلك من خلال عدة جولات على النحو التالي :

الجولة الأولى :

تتضمن الخطوات التالية :

الخطوة 1 :

يتم اختيار أي مسار من مسارات الشبكة بشكل عشوائي من الحدث S إلى الحدث K وليكن المسار [(S-A) , (A-C) , (C-K)] .

الخطوة 2 :

أقصى كمية تدفق للمسار

= الأقل من { طاقة النشاط (S-A), طاقة النشاط (A-C), طاقة النشاط (C-K) }

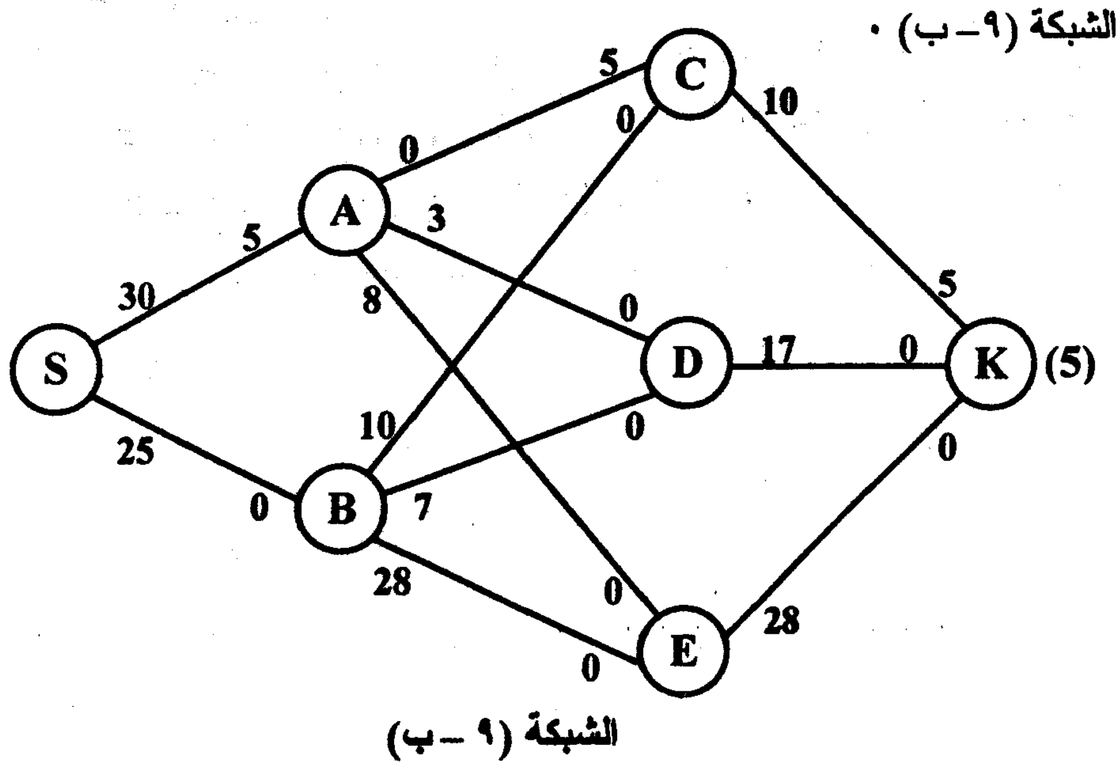
= الأقل من { 15 , 5 , 35 } = 5

الخطوة 3 :

يتم شحن 5 وحدات من الحدث S إلى الحدث K ، وتخفض طاقات الأنشطة (S-A) , (A-C) , (C-K) بمقدار 5 وحدات ، وتزداد طاقات الأنشطة (A-S) , (C-A) , (K-C) بمقدار 5 وحدات ، وسوف تصبح طاقة النشاط (A-C) مساوية للصفر فيمكن حذفه من الشبكة أو اعتباره كأن لم يكن .

الخطوة 4 :

نعيد رسم شبكة التدفق بعد عمل التعديلات المذكورة كما يتضح من الشبكة (٩ـ ب) .



الشبكة (٩ ـ ب)

الخطوة 5 :

حيث أنه ما زال توجد بالشبكة مسارات أخرى تستوعب تدفق موجب من الحدث S حتى الحدث K ، لذا ننتقل إلى الجولة التالية ·

الجولة الثانية :

الخطوة 1 :

يتم اختيار مسار آخر بالشبكة بشكل عشوائي وليكن المسار [(E-K) , (A-E) , (S-A)] ·

الخطوة 2 :

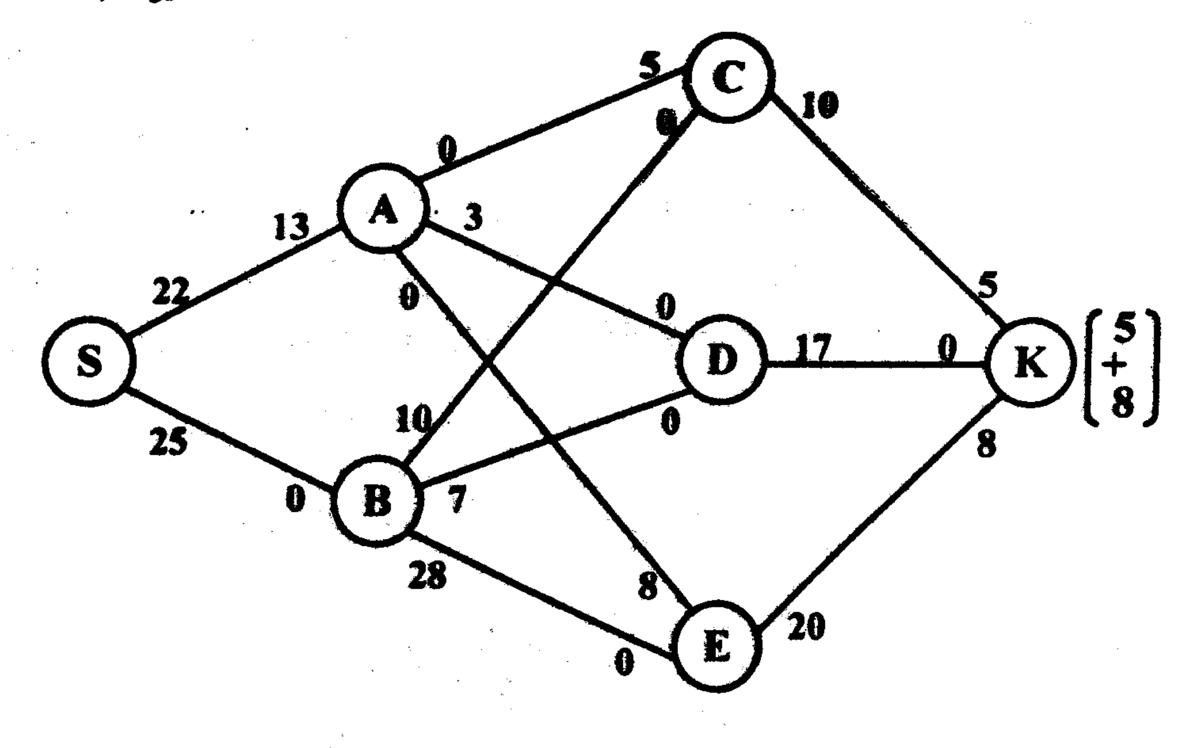
أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من (30 , 8 , 28) = 8

الخطوة 3 :

يرسل 8 وحدات من المصدر S وتسلم للمصب K ، ثم تخفض طاقات الأنشطة (S-A) , (A-E) , (E-K) بمقدار 8 وحدات ، وتزداد طاقات الأنشطة (A-S) , (E-A) , (K-E) بمقدار 8 وحدات ، بعد ذلك سوف تصبح الطاقة المتاحة للنشاط (A-E) مساوية للصفر ·

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل التعديلات السابقة كما يتضح من الشبكة (٩ – جـ) ·



الشبكة (٩ – جـ)

الخطوة 5 :

ما زال بالشبكة مسارات تستوعب تدفق موجب من الحدث S إلى الحدث K ، لذا ننتقل إلى الجولة التالية .

الجولة الثالثة :

الخطوة 1 :

يختار مسار آخر بالشبكة بشكل عشوائي وليكن المسار [(S-A) , (A-D) , (D-K)] .

الخطوة 2 :

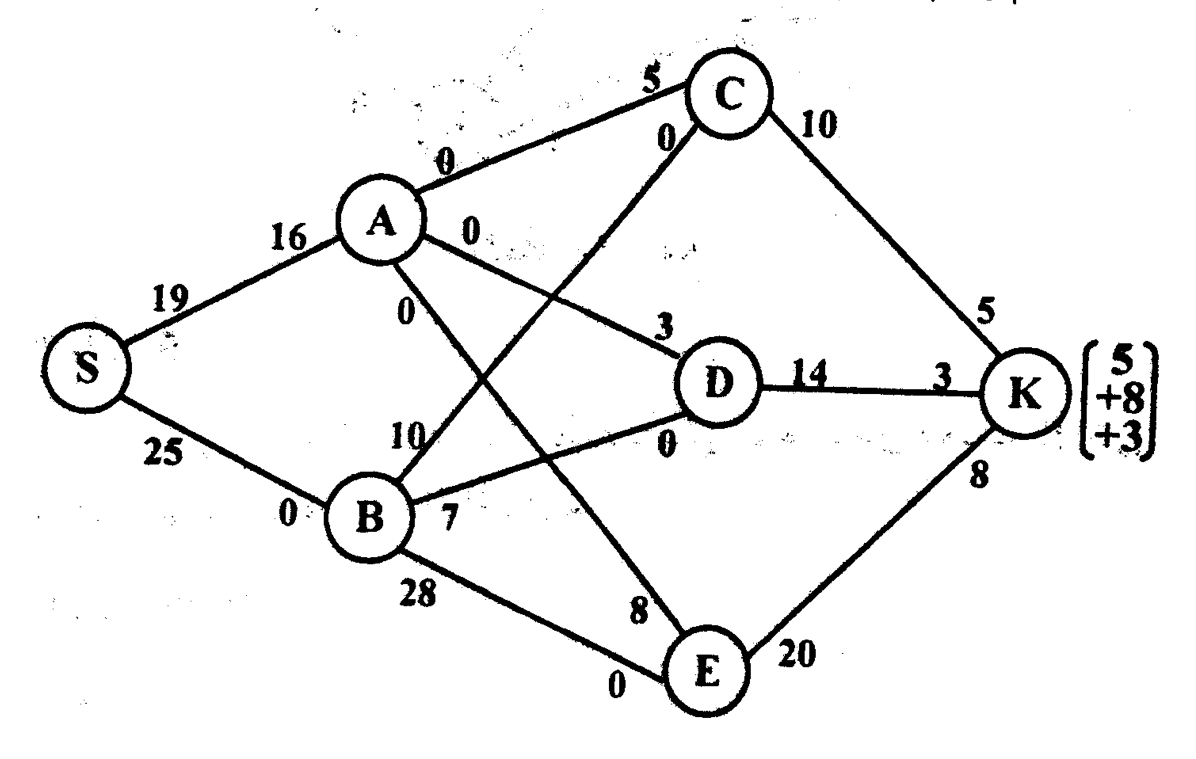
أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من (22 , 3 , 17) = 3

الخطوة 3 :

ترسل 3 وحدات من المصدر S إلى المصب K وتخفض طاقات الأنشطة (S-A) , (A-D) , (D-K) بمقدار 3 وحدات ، في حين تزداد طاقات الأنشطة (A-S) , (D-A) , (K-D) بمقدار 3 وحدات .

الخطوة 4 :

يتم رسم شبكة الشحن بعد عمل هذه التعديلات كما يلي :



الشبكة (٩ – د)

الخطوة 5 :

ما زال موجوداً بالشبكة مسارات تستوعب تدفق موجب من المصدر إلى المصب فننتقل إلى الجولة التالية :

الجولة الرابعة :

الخطوة 1 :

يتم اختيار مسار آخر بالشبكة بصورة عشوائية وليكن المسار [(E-K) , (B-E) , (S-B)] ·

الخطوة 2 :

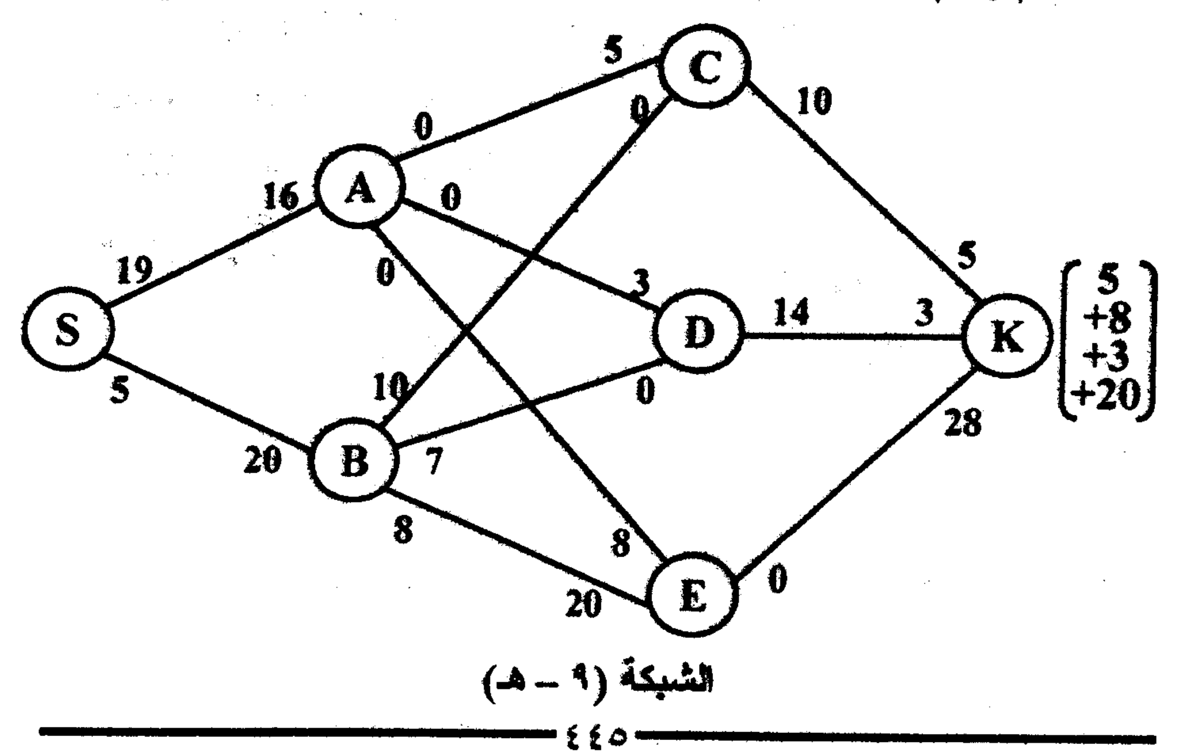
أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من (25 , 28 , 20) = 20

الخطوة 3 :

ترسل 20 وحدة من المصدر S وتسلم للمصب K ، وتخفض طاقات الأنشطة (S-B) , (B-E) , (E-K) بمقدار 20 وحدة وتزداد طاقات الأنشطة (B-S) , (E-B) , (K-E) بمقدار 20 وحدة ·

الخطوة 4 :

يتم رسم شبكة التدفق بعد عمل تلك التعديلات على النحو التالي :



الشبكة (٩ ـ هـ)

الخطوة 5 :

ما زالت الشبكة تحتوى على مسارات تستوعب تدفق موجب ، لذا يتم الانتقال إلى جولة تالية ·

الجولة الخامسة :

الخطوة 1 :

يتم اختيار أحد مسارات الشبكة التي تستوعب تدفق موجب بشكل عشوائي وليكن المسار [(S-B) , (B-C) , (C-K)] ·

الخطوة 2 :

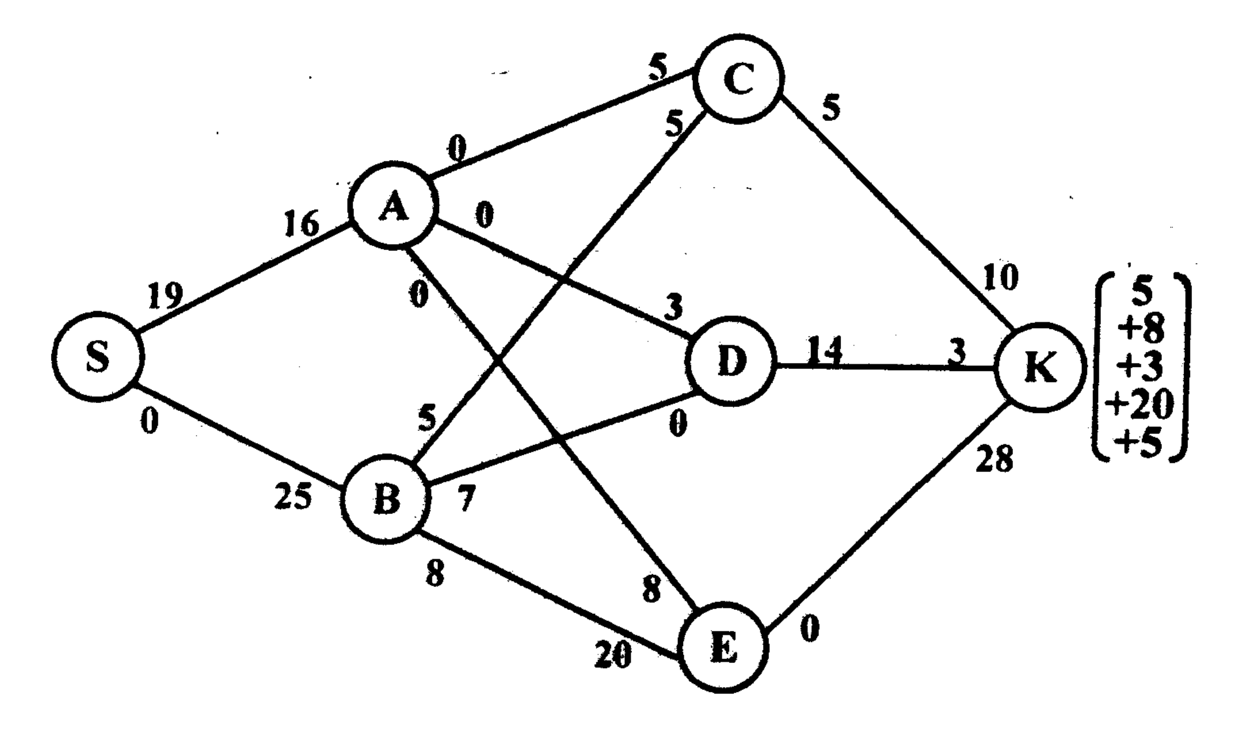
أقصى كمية تدفق خلال هذا المسار = الأقل من (5 , 10 , 10) = 5

الخطوة 3 :

ترسل 5 وحدات من المصدر S إلى المصب K ، وتخفض طاقات الأنشطة (S-B) , (B-C) , (C-K) بمقدار 5 وحدات ، في حين تزداد طاقات الأنشطة (B-S) , (C-B) , (K-C) بنفس المقدار وهو 5 وحدات ·

الخطوة 4 :

نعيد رسم الشبكة بعد عمل تلك التعديلات على النحو التالي :



الشبكة (٩ – و)

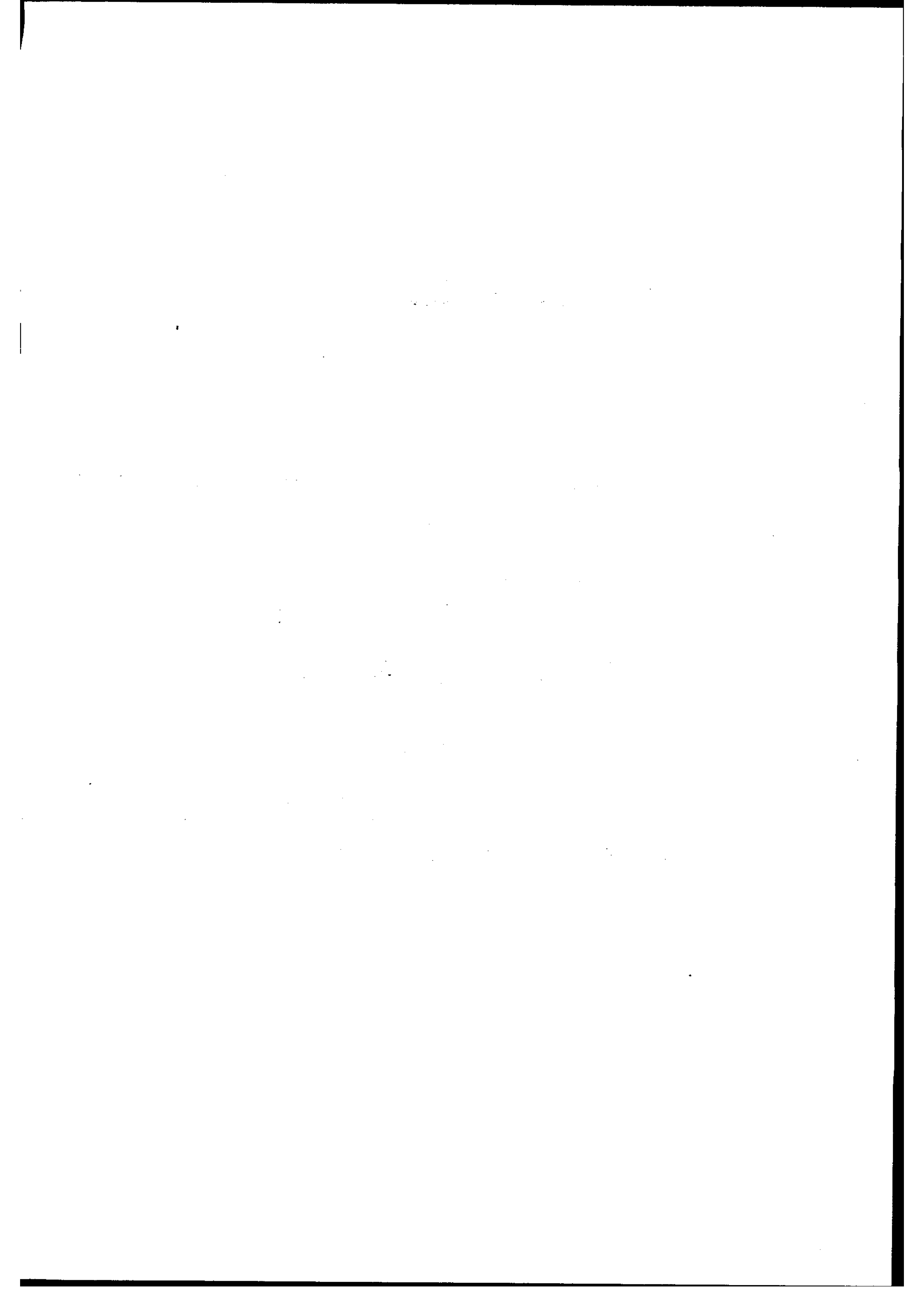
الخطوة 5 :

وكما هو واضح فلم يعد يوجد بشبكة التدفق الأخيرة (٩ – و) أي مسار يربط بين المصدر S والمصب K يستوعب تدفق موجب ومن ثم يكون قد تم التوصل إلى الحل الأمثل ، حيث :

أقصى كمية تدفق من الأسماك يمكن أن ترسل من المصدر S إلى المصب K (أي من المزارع السمكية إلى مراكز الاستيراد) تساوي 41 ألف طن •

الباب السادس

نظرية صفوف الانتظار



الباب السادس
نظرية صفوف الانتظار
Queuing Theory

(٦-١) مقدمة

تعتبر ظاهرة الانتظار من الظواهر المألوفة والشائعة في حياتنا لدرجة أنها أصبحت تمثل جزء من حياتنا اليومية ، فقلما يوجد إنسان في المجتمع المعاصر لم يقف في صف انتظار للحصول على خدما ما • ولنا أن نتصور المواقف التالية :

- وقوف الأفراد في طوابير أمام الأفران وأكشاك الخبز •
- وقوف العملاء أمام المحصل لدفع ثمن مشترواتهم في السوبرماركت •
- وقوف العملاء في طابور لصرف الرواتب أو لصرف شيكات في البنوك •
- وقوف المرضى في طوابير للكشف الطبي أو لصرف الدواء في العيادات الخارجية بالمستشفيات •
- وقوف السيارات في صفوف أمام إشارات المرور •
- وقوف السيارات في صفوف وانتظارها أمام محطة البنزين •
- الآلات والماكينات المعطلة في انتظار الصيانة والإصلاح •
- الطائرات في انتظار الأمر بالإقلاع من الممر أو بالهبوط فيه •
- وقوف السفن في صفوف خارج البوغاز في انتظار الدخول للتفريغ أو الشحن •
- القضايا في المحاكم في إنتظار الحكم فيها •
- المطالب المنزلية المتعددة في حياة كل إنسان في انتظار تلبيتها •

ففي مثل هذه المواقف وما شابهها ينشأ طابور أو صف انتظار ، وعلى ذلك فإن الطابور أو صف الانتظار يمثل عدد من الوحدات (أفراد ، سيارات ، سفن ، طائرات ، آلات ، قضايا ، ... الخ) تقف على شكل طابور في انتظار الحصول على خدمة ، وذلك في حالة انشغال مقدمي الخدمة ، ثم يحصلون في النهاية على الخدمة ثم يغادرون مكان الخدمة .

وتنشأ صفوف الانتظار إذا كان معدل وصول العملاء أكبر من معدل أداء الخدمة لهم ، أو إذا كان معدل وصول العملاء أقل من معدل أداء الخدمة لهم ، وفي الحالة الأخيرة ينشأ صف انتظار ولكنه سيكون من جانب مقدم الخدمة يتمثل في انتظار مركز الخدمة لعملاء جدد حيث ستكون هناك طاقة عاطلة متمثلة في وقت بدون عمل يمكن الاستفادة منه .

وإذا قررت المنظمة زيادة الطاقة الخدمية لديها وأسرفت في زيادة عدد مراكز الخدمة حتى لا ينتظر العملاء كثيراً فإن ذلك يمثل هدراً لمواردها بسبب وجود طاقة غير مستغلة ، وعلى الجانب الأخر ، إذا قررت المنشأة تقليل الطاقة الخدمية لديها وقللت من مراكز الخدمة سوف يترتب على ذلك صف انتظار طويل غالباً ما يصاحبه أن تفقد المنظمة عدداً كبيراً من عملائها لاستيائهم من طول الانتظار ويتحولون إلى منظمات أخرى للحصول على الخدمة .

ومما يزيد الموقف صعوبة أن معدلات وصول العملاء إلى مراكز الخدمة يتم بشكل عشوائي ، كما أن معدلات أداء الخدمة للعملاء يتم أيضاً بشكل عشوائي .

وتمثل نظرية صفوف الانتظار أداة تحليلية تمكن من اشتقاق مقاييس ومعدلات تساعد على تصميم النظام بشكل يحقق التوازن بين تكلفة

الخدمة وتكلفة انتظار الحصول على الخدمة وهو ما يعرف بالتصميم الأمثل لأداء الخدمة ٠

وتاريخياً يعد ايرلانج منذ أوائل عام ١٩١٠ أول من طبق نظرية صفوف الانتظار في تصميم نظام الطلب على المكالمات التليفونية ، حيث وجه جهوده في البداية لدراسة التأخير بالنسبة لعامل تشغيل (أي مركز خدمة) واحد ثم عمم نتائج دراسته لتشمل عدد من عمال التشغيل (أي عدة مراكز خدمة) ٠ ثم شاع استخدام نظرية صفوف الانتظار خلال الحرب العالمية الثانية ، ومنذ ذلك التاريخ وحتى الآن تنوعت تطبيقات نظرية صفوف الانتظار في شتى مجالات الحياة مثل مجالات الاتصال والنقل والإنتاج والخدمات الاجتماعية ٠٠٠ الخ ٠

(٦-٣) عناصر صفوف الانتظار

يتكون صف الانتظار من خمسة عناصر أساسية هي :

١ - نمط أو توزيع وصول العملاء ٠

٢ - نمط أو توزيع وقت الخدمة ٠

٣ - عدد مراكز الخدمة ٠

٤ - نظام تقديم الخدمة ٠

٥ - مجتمع العملاء الطالب للخدمة ٠

وسوف نتناول كل عنصر من هذه العناصر بشيء من التفصيل :

١ - توزيع وصول العملاء **Arrival Distribution**

كلمة العملاء هنا تعني طالبي الخدمة أيا كان نوعهم ، فقد يكونوا أفراد ، سيارات ، سفن ، آلات أو أجهزة بها عطل ، قضايا تنتظر الحكم فيها ، ٠٠٠ الخ ٠

ومعدل وصول العملاء يعني عدد العملاء الذين يصلون إلى مكان الخدمة خلال فترة زمنية محددة ، فقد يصل العملاء إلى مكان الخدمة بمعدل ثابت (ثلاثة عملاء كل ساعة مثلاً) ، ولكن ليس هذا هو الموقف العادي ، ففي معظم الحالات يصل العملاء إلى مكان الخدمة بمعدلات مختلفة وبطريقة عشوائية ، أي أن كل وصول يكون مستقلاً عن الوصول الآخر ولا يمكن التنبؤ بحدوث الوصول • ولقد اتفق العلماء على أن العملاء يصلون إلى مكان الخدمة وفق توزيع احتمالي معروف وهو توزيع بواسون Poisson Distribution ، وبالطبع فإن توزيع بواسون ليس هو التوزيع الوحيد في هذه الحالة ، فقد يصل العملاء إلى مكان الخدمة وفق توزيعات احتمالية أخرى مثل توزيع إيرلانج أو التوزيع فوق الهندسي ، إلا أن توزيع بواسون يعد هو الأفضل والأكثر شيوعاً لوصف معدل الوصول العشوائي ، والذي يفترض أن عدد العملاء الذين يصلون إلى الصف هو متغير عشوائي ولكن بمتوسط معدل وصول ثابت يرمز له بالرمز λ ، والذي يشير إلى عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام في وحدة الزمن الواحدة •

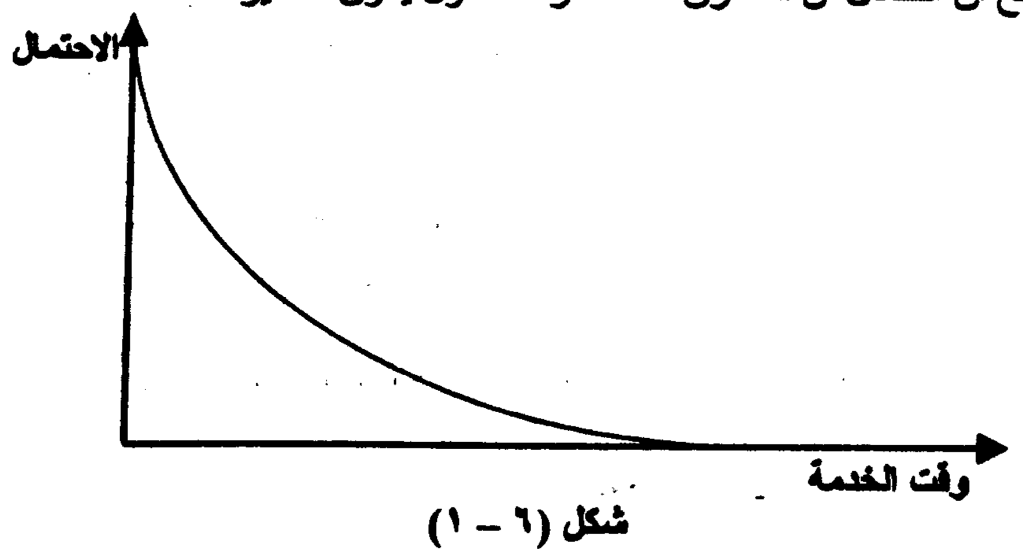
وأيضاً فيما يتعلق بنمط وصول العملاء فقد يصل العملاء منفردين أو في مجموعات ، وقد يوجد افتراضات غير عادية عن سلوك العملاء مثل التزاحم (أو التذمر) ومثل التخطي ، ويحدث التزاحم (أو التذمر) عندما يرفض العميل الذي يصل الدخول إلى مكان الخدمة بسبب طول صف الانتظار ، بينما يحدث التخطي عندما يترك أحد العملاء الموجودين أصلاً في الصف مكانه بسبب طول صف الانتظار • وما لم ينص صراحة على تلك الافتراضات غير العادية عن نمط وصول العملاء فإنه يفترض أن يصل العملاء منفردين ولا يحدث تزاحم أو تخطي في صف الانتظار •

ومن الناحية التطبيقية فعلى الباحث أن يقوم بتسجيل العدد الفعلي للعملاء الذين يصلون إلى النظام المدروس في كل فترة زمنية لبضعة أيام أو بضعة أسابيع أو حتى بضعة شهور ويستخدم التوزيع التكراري المتحصل عليه في اختبار ما إذا كان توزيع بواسون يمثل توفيقاً جيداً لتوزيع وصول العملاء ٠

٢ - توزيع وقت الخدمة Service Distribution

يقصد بوقت الخدمة زمن أداء الخدمة للعميل أو الزمن الذي يستغرقه العميل في مركز الخدمة منذ اللحظة التي يبدأ عندها تقديم (أو طلب) الخدمة حتى إتمام الخدمة ، وقد يكون هذا الزمن ثابتاً أو متغيراً عشوائياً ٠ وقد وجد العلماء أن أفضل توزيع احتمالي يمثل وقت الخدمة هو التوزيع الأسى Exponential Distribution والذي يفترض أن متوسط معدل أداء الخدمة هو μ ، والذي يشير إلى عدد العملاء الذين يتم خدمتهم في وحدة الزمن الواحدة ٠

والشكل (٦ – ١) يبين منحنى التوزيع الأسى لوقت الخدمة للعميل والذي يوضح أن احتمال أن تستغرق الخدمة زمناً أطول يكون صغيراً ٠



شكل (٦ – ١)

٣ - عدد مراكز الخدمة Number of Service Channels

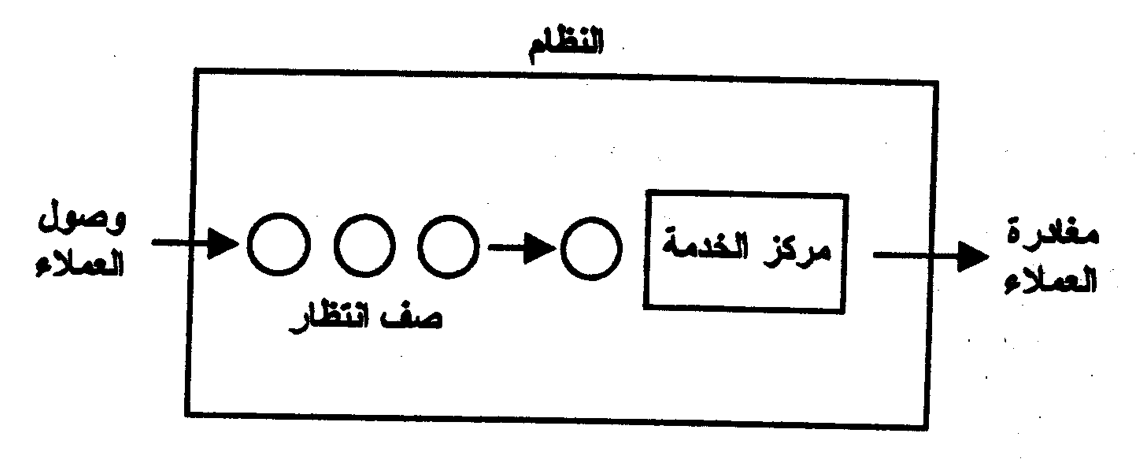
يوجد عدة نماذج لنظام صفوف الانتظار لعل من أهمها ما يلي :

أ - نظام الصف الواحد ومركز خدمة واحد

يقصد بمركز الخدمة (وأحيانا يطلق عليه قناة الخدمة) الشخص أو الشيء الذي يقدم الخدمة اللازمة للعميل ، ومن أمثل هذا النظام ما يلي :

- انتظار المرضى في عيادة طبيب .
- انتظار السيارات في محطة بنزين بها طلمبة بنزين واحدة .
- انتظار الأفراد أمام شباك تذاكر السينما أو المسرح .
- انتظار الأفراد أمام كشك واحد لبيع الخبز .

ويعبر عن هذا النظام بيانيا في الشكل (٦ – ٢)



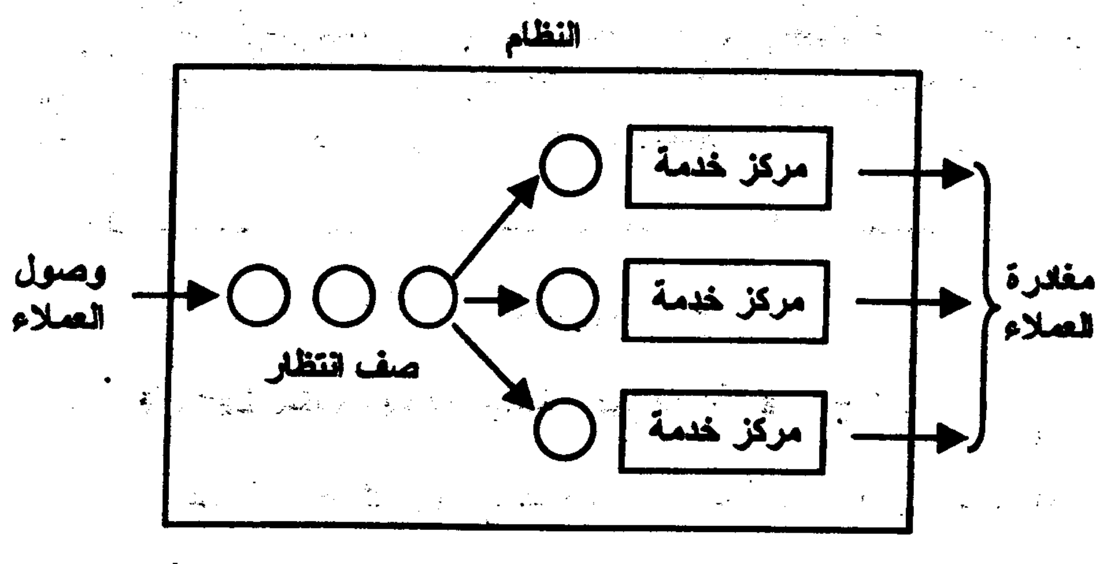
شكل (٦ – ٢)

ب - نظام الصف الواحد وعدة مراكز خدمة على التوازي

وفقا لهذا النظام يمكن تقديم الخدمة لعدد من العملاء في نفس الوقت ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- انتظار السيارات في محطة بنزين بها عدد من طلمبات البنزين •
- انتظار العملاء في أحد البنوك لصرف الشيكات أو الرواتب إذا كان هناك أكثر من شباك للصرف •

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل (٦ – ٣)



شكل (٦ – ٣)

جـ - نظام الصف الواحد وعدة مراكز خدمة على التوالي

ويحدث ذلك عندما يتعين على العميل المرور على عدة مراكز للخدمة المتتالية حيث ينجز كل مركز جزء من الخدمة التي يطلبها العميل ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- عندما يمر منتج معين داخل المصنع بعدة مراحل إنتاجية متتالية •
- الإجراءات المتتابعة التي ينهيها العميل عند استخراج أو تجديد رخصة السيارة في إدارة المرور •

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل (٦ ـ ٤)



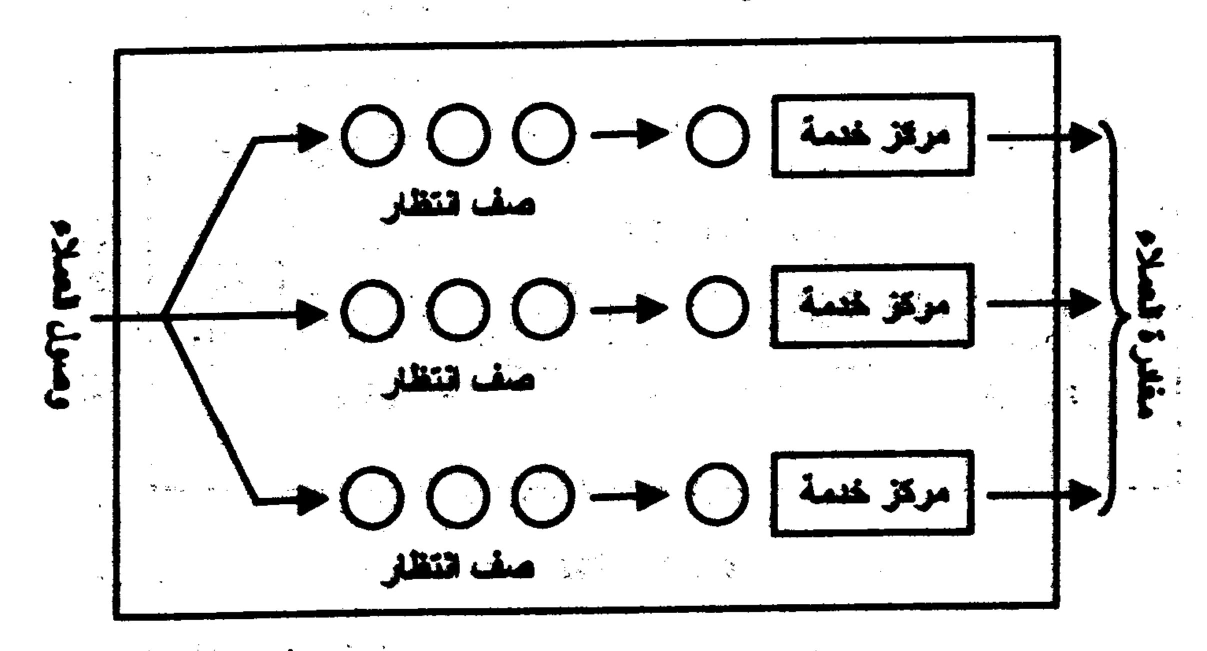
شكل (٦ ـ ٤)

د ـ نظام عدة صفوف انتظار وعدة مراكز خدمة على التوازي

وفقاً لهذا النظام يوجد عدة مراكز خدمة تقدم نفس الخدمة لعدد من العملاء في نفس الوقت ويسمح بوجود صف انتظار أمام كل مركز خدمة ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- محطة البنزين التي بها عدة طلمبات وتقف السيارات في صفوف وكل صف يقف أمام طلمبة بنزين •
- مكتب البريد الذي يوجد به عدة شبابيك لبيع الطوابع وتسجيل الخطابات ويقف العملاء في صفوف بحيث أن كل صف يقف أمام شباك •

ويعبر عن هذا النظام بيانياً في الشكل (٦ ـ ٥)



شكل (٦ – ٥)

٤ - نظام تقديم الخدمة Service Discipline

يقصد بنظام تقديم الخدمة مجموعة القواعد التي تحدد أولوية العملاء في الحصول على الخدمة ، ويوجد عدة نماذج لنظام تقديم الخدمة منها ما يلي :

أ - من يأتي أولاً يُخدم أولاً First come, first served (FIFO)

وفقاً لهذا النظام تتم خدمة العملاء حسب ترتيب الوصول إلى الصف ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- ما يحدث في صالات السفر وصالات الوصول أمام شباك الجوازات وفي أماكن تفتيش الحقائب .
- عند خدمة السيارات في محطات البنزين .
- ما يحدث أمام شباك قطع التذاكر في محطة القطارات .

ويعد هذا النظام هو الأكثر شيوعاً في معظم مجالات الخدمة التي تتكون فيها صفوف الانتظار ، ويفترض ضمنياً أن هذه القاعدة هي التي تسري ما لم ينص صراحة على سواها ٠

ب - من يأتي أخيراً يُخدم أولاً Last come, first served (LIFO)

وفقا لهذا النظام فإن العميل الذي يصل أخيرا يخدم أولا ، ومن أمثلة ذلك ما يلي :

- ما يحدث للركاب داخل المصعد الكهربائي ٠
- عند إصلاح قطارات السكك الحديدية أو عربات المترو داخل ورش الصيانة والإصلاح ٠

جـ - تعطى الأولوية Priority لخدمة العميل حسب معيار معين بغض النظر عن موعد الوصول للصف

ومن هذه المعايير ما يلي :

- **أهمية العميل :** فقد يفضل مثلاً البدء بإصلاح الآلة التي تمثل نقطة اختناق في عملية الإنتاج ويترتب على عطلها خسارة كبيرة عن غيرها من الآلات العاطلة ٠
- **البعد الاجتماعي :** فقد تعطي أولوية للأطفال أو الشيوخ أو النساء عند تقديم خدمة معينة أو قد تعطي أولوية عند استقبال الحالات الحرجة في المستشفيات عن المرضى العاديين ٠
- **زمن أداء الخدمة :** قد يفضل البدء بإصلاح الآلات التي يستغرق إصلاحها زمناً أقل من غيرها من الآلات خصوصاً عن تساوي تكلفة العطل ٠

- العشوائية : حيث يتم اختيار العميل الذي تقدم إليه الخدمة بشكل عشوائي دون التقيد بأي ترتيب مسبق ، وهذا النظام نادر الحدوث نظراً لما يسببه من تذمر وضجر لباقي العملاء في الصف قد يدفع البعض منهم إلى مغادرة الصف قبل الحصول على الخدمة وبذلك تخسره المنظمة أو المنشأة ٠

٥ - مجتمع العملاء طالب الخدمة (أي طاقة النظام)

Calling Source or Population

يقصد بحجم مجتمع العملاء طالبي الخدمة أكبر عدد من العملاء يمكن أن يتواجدوا في النظام سواء أكانوا في موقع مركز الخدمة أو في صف الانتظار ٠

ويوجد نوعان من مجتمع العملاء هما :

أ - المجتمع اللانهائي أو غير المحدود

ويحدث ذلك إذا كان عدد العملاء كبيراً جداً والنظام له طاقة غير محدودة وبالتالي ليس له حدود لعدد العملاء المسموح بهم داخل نظام الخدمة كما هو الحال بالنسبة لعدد السيارات التي ترد إلى محطة البنزين للغسيل أو التموين ٠

ب - المجتمع النهائي أو المحدود

إذا كان عدد العملاء صغيراً والنظام له طاقة محدودة ولا يسمح بالتالي إلا بعدد محدود داخل نظام الخدمة ، كما في حالة عدد المرضى المتواجدين داخل عيادة أحد الأطباء ٠

ونظراً لأن العمليات الحسابية تكون أكثر سهولة في حالة المجتمعات اللانهائية ، لذلك سوف يؤخذ بهذا الافتراض عند تحليل نماذج صفوف الانتظار حتى عندما يكون مجتمع العملاء كبيراً نسبياً ولكنه محدود . وسوف يفترض ضمنياً أن مجتمع العملاء طالبي الخدمة مجتمع لا نهائي ، إلا إذا نص صراحة على أنه مجتمع نهائي .

(٦-٣) بعض نماذج صفوف الانتظار

تفترض معظم نماذج صفوف الانتظار أن وصول ومغادرة العملاء لصف الانتظار تحدث طبقاً لعمليات الميلاد والوفاة لتوزيع بواسون ، ويقصد بعملية الميلاد وصول أحد العملاء إلى مكان الخدمة وتحدث حالة الوفاة عندما يخرج أحد العملاء من مكان الخدمة .

ودراسة مشكلة صفوف الانتظار باستخدام بعض الصيغ الرياضية والاحتمالية يُمكن منشآت الأعمال أو المنظمات بشكل عام من التعرف على المؤشرات والمقاييس التالية :

١ - احتمال أن يكون مركز الخدمة عاطلاً (أي لا يوجد صف انتظار) .

٢ - احتمال وجود عدد معين من العملاء في النظام .

٣ - احتمال أن يكون مركز الخدمة مشغولاً ويضطر العميل للانتظار .

٤ - متوسط عدد العملاء المنتظرين في النظام .

٥ - متوسط عدد العملاء المنتظرين في صف الانتظار .

٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام .

٧ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار قبل أن تقدم له الخدمة .

هذه المؤشرات والمقاييس بالإضافة إلى تكلفة الخدمة وتكلفة الانتظار تساعد الإدارة على فهم خصائص تشغيل نظام صفوف الانتظار وهذا بدوره يُمكن الإدارة من معرفة ما إذا كان مستوى الخدمة في النظام يسير حسب المستوى المرغوب فيه ويحقق التوازن بين تكلفة أداء الخدمة وتكلفة انتظار الحصول على الخدمة ، أم أن الأمر يحتاج إلى التدخل من أجل تحسين مستوى الخدمة •

ومما لا شك فيه أن خصائص تشغيل نظام صفوف الانتظار تتأثر بطول مدة تشغيل هذا النظام ، والتعرف على خصائص تشغيل النظام خلال الزمن يُعد أمراً غاية في الصعوبة • ومن حسن الطالع أنه كلما زادت مدة تشغيل النظام فإن خصائص تشغيله تميل إلى الاستقرار ، لذلك سوف يفترض أن نظام صفوف الانتظار يعمل منذ مدة طويلة تكفي لإلغاء أثر الزمن على خصائص تشغيل النظام ، ويقال في هذه الحالة أن النظام في حالة استقرار Steady Stage •

وسوف نكتفي هنا بدراسة نموذجين من نماذج صفوف الانتظار ، النموذج الأول هو صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد ، والنموذج الثاني هو صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة •

(٦-٣-١) صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد (M/M/1)

في هذا النموذج يوجد صف انتظار واحد به العديد من العملاء يطلبون الخدمة من مركز خدمة واحد { شكل (٦ – ١) } ، وجرت العادة على أن هذا النموذج يرمز له بالمصطلح M/M/1 ، حيث :

M تشير إلى معدل الوصول الذي يتبع توزيع بواسون

M تشير إلى معدل الخدمة الذي يتبع التوزيع الأسى

1 يشير إلى مركز خدمة واحد •

ويبنى هذا النموذج على مجموعة الفروض التالية :

١ - صف انتظار واحد •

٢ - مركز خدمة واحد •

٣ - طاقة النظام غير محددة •

٤ - نظام خدمة العميل : من يأتي أولا يُخدم أولا FIFO •

٥ - وصول العملاء هو متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط معدل وصول λ لكل وحدة زمنية •

٦ - زمن الخدمة هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسى بمتوسط معدل خدمة μ لكل وحدة زمنية •

٧ - معدل وصول العملاء أقل من معدل أداء الخدمة لهم ، أي أن $\mu > \lambda$ •

٨ - عدم تذمر العملاء بسبب طول صف الانتظار وعدم مغادرة العميل للصف متى تم دخوله وأن يكون وصول العملاء منفردين •

ويوجد مجموعة من المؤشرات والمقاييس تم اشتقاقها وتطبيقها على هذا النموذج ، وتجدر الإشارة إلى أن التركيز هنا لن يكون منصباً على التحليل الرياضي لكيفية اشتقاق هذه المؤشرات والمقاييس ، وإنما سيكون التركيز هو على كيفية استخدام هذه المؤشرات والمقاييس في فهم خصائص النظام وتحسين مستوى الخدمة فيه ، هذه المؤشرات والمقاييس نعرضها فيما يلي :

١ - احتمال أن يكون مركز الخدمة مشغولا بأداء الخدمة للعميل ، والذي يعني في نفس الوقت احتمال أن يضطر العميل للانتظار في الصف هو :

$$\frac{\lambda}{\mu}$$

والقيمة $\frac{\lambda}{\mu}$ تعبر عن القيمة المتوقعة لعدد مرات وصول العملاء إلى مركز الخدمة لكل وحدة زمنية ، وتعرف هذه العلاقة بمعامل الاستخدام أو كثافة الحركة ، أي أن :

$$\text{معامل الاستخدام (كثافة الحركة)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

فإذا كان معدل الوصول ، λ ، أكبر من معدل الخدمة ، μ ، فإن :

$$\frac{\lambda}{\mu} > 1$$

وهذا يعني أن الطول المتوقع لصف الانتظار سوف يزيد بلا حدود ، ومن ثم لا تحدث حالة سكون أو استقرار للنظام .

وإذا كان معدل الوصول ، λ ، مساوياً لمعدل الخدمة ، μ ، فإن :

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1$$

وهذا يعني أن الطول المتوقع لصف الانتظار سوف يزيد أيضاً بلا حدود ، ومن ثم لن يكون النظام في حالة سكون أو استقرار .

أما إذا كان معدل الوصول ، λ ، أقل من معدل الخدمة ، μ ، فإن :

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

فهذا يعني أن طول صف الانتظار المتوقع سوف يتناقص إلى أن ينتهي ويكون النظام بالتالي في حالة سكون أو استقرار •

٢ - احتمال أن يكون النظام غير مشغول بعملاء (أي عاطلا) هو :

$$P(x=0)=P_0=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

حيث x متغير عشوائي يشير إلى عدد العملاء الموجودين في النظام •

٣ - احتمال وجود n من العملاء في النظام هو :

$$P(x=n)=P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ومن ثم فإن :

احتمال وجود عميل واحد في النظام هو :

$$P(x=1)=P_1=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

احتمال وجود أثنين من العملاء في النظام هو :

$$P(x=2)=P_2=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

وهكذا •

٤ - احتمال أن يكون عدد العملاء في صف الانتظار أكبر من أو يساوي n هو :

$$P(x\geq n)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

٥ - متوسط عدد العملاء في النظام :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز L_s ، حيث :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

٦ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز L_q ، حيث :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

وكما هو واضح فإنه يوجد فرق بين عدد العملاء في النظام وعدد العملاء في الصف ، فعدد العملاء في النظام يساوي عدد العملاء الواقفين في الصف بالإضافة إلى عدد العملاء الذين تقدم لهم الخدمة .

٧ - متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في النظام :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز W_s ، حيث :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

٨ - متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في الصف (أي قبل بدء الخدمة) :

سوف يرمز لهذا المتوسط بالرمز W_q ، حيث :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

ويمكن ببساطة إثبات أن :

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

٩ - احتمال أن يقضي العميل أكثر من t وحدة زمنية في النظام :

سوف يرمز لهذا الاحتمال بالرمز P_s ، حيث :

$$P_s(>t) = e^{-t/W_s} \qquad , t \geq 0$$

١٠- احتمال أن يقضي العميل أكثر من t وحدة زمنية في الصف :

سوف يرمز لهذا الاحتمال بالرمز P_q ، حيث :

$$P_q(>t) = \frac{\lambda}{\mu}\ e^{-t/W_s} \qquad , t > 0$$

مثال (١) :

محطة بنزين بها مضخة واحدة ، وتصل السيارات إلى المحطة وفق توزيع بواسون بمعدل 12 سيارة كل ساعة ۰ فإذا كان زمن خدمة السيارات بالمحطة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 4 دقائق لكل سيارة ۰

المطلوب حساب ما يلي :

١ - احتمال أن تكون المحطة مشغولة بخدمة سيارة واحدة ۰

٢ - احتمال أن تكون المحطة خالية بدون استخدام ۰

٣ - متوسط عدد السيارات في المحطة ۰

٤ - متوسط عدد السيارات في صف الانتظار ۰

٥ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة ۰

٦ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في صف الانتظار ٠

٧ - احتمال أن تقضي السيارة في المحطة أكثر من 40 دقيقة ٠

٨ - احتمال أن تقضي السيارة في صف الانتظار أكثر من 20 دقيقة ٠

٩ - احتمال أن يكون بالمحطة n سيارة تنتظر الخدمة ، ومنها أوجد احتمال أن يكون في المحطة 3 سيارات على الأكثر ٠

الحـــل :

معدل الوصول ، λ ، هو :

$$\lambda = 12 \text{ (سيارة / ساعة)}$$

معدل الخدمة ، μ ، هو :

$$\mu = \frac{60}{4} = 15 \text{ (سيارة / ساعة)}$$

١ - احتمال أن تكون المحطة مشغولة بخدمة سيارة واحدة هو :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = 0.8$$

هذه النتيجة تعني أن محطة البنزين سوف تكون مشغولة 80% من الوقت

٢ - احتمال أن تكون المحطة خالية بدون استخدام هو :

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0.8 = 0.2$$

٣ - متوسط عدد السيارات في المحطة (أي في النظام) هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{12}{15 - 12} = 4 \text{ (سيارات)}$$

٤ - متوسط عدد السيارات في صف الانتظار هو :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{144}{15(15-12)} = 3.2 \quad (\text{سيارات})$$

٥ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة هو :

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15-12} = \frac{1}{3} \quad (\text{ساعة})$$

$$= \frac{1}{3} \times 60 = 20 \quad (\text{دقيقة})$$

٦ - متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في صف الانتظار (قبل الدخول للخدمة) هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12}{15(15-12)} = \frac{4}{15} \quad (\text{ساعة})$$

$$= \frac{4}{15} \times 60 = 16 \quad (\text{دقيقة})$$

٧ - لإيجاد احتمال أن تقضي السيارة في المحطة أكثر من 40 دقيقة ، نفرض أن الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة هو المتغير العشوائي T ، حيث :

$$P_s(T > t) = e^{-t/W_s}$$

إذن :

احتمال أن تقضي السيارة في المحطة أكثر من 40 دقيقة هو :

$$P_s(T > 40) = e^{-40/20} = e^{-2} = 0.135$$

ومعنى هذا أنه يوجد احتمال قدره 13.5% أن تنتظر السيارة في المحطة لأكثر من 40 دقيقة .

٨ - احتمال أن تنتظر السيارة في صف الانتظار أكثر من 20 دقيقة هو :

$$P_q(T > 20) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-t/W_s}$$

$$= \frac{12}{15} e^{-20/20} = \frac{4}{5} e^{-1} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2.718}\right)$$

$$= 0.294$$

٩ - لإيجاد احتمال أن يكون بالمحطة n سيارة ، نفرض أن عدد السيارات الموجودين بالمحطة هو المتغير العشوائي x ، إذن :

احتمال أن يكون بالمحطة n سيارة هو :

$$P(x = n) = P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \left(\frac{12}{15}\right)^n (0.2) = \left(\frac{4}{5}\right)^n (0.2)$$

احتمال وجود 3 سيارات على الأكثر بالمحطة هو :

$$P(x \le 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{0}(0.2)+\left(\frac{4}{5}\right)(0.2)+\left(\frac{4}{5}\right)^{2}(0.2)+\left(\frac{4}{5}\right)^{3}(0.2)$$

$$=0.2+0.16+0.128+0.1024=0.5904$$

مثال (٢) :

لاحظ مدير أحد محلات بيع الأحذية أن العملاء يصلون المحل وفق توزيع بواسون بمعدل 18 عميلاً في الساعة ، كما لاحظ أن معدل خدمة العميل يتبع التوزيع الأسى بمعدل 20 عميلاً في الساعة ٠

المطلوب إيجاد ما يلي :

١ - احتمال أن يكون المحل خالياً من العملاء ٠

٢ - احتمال وجود 4 عملاء بالمحل ٠

٣ - متوسط عدد العملاء في المحل (أي في النظام) ٠

٤ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار ٠

٥ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل ٠

٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار ٠

٧ - إذا ارتفع معدل وصول العملاء إلى المحل وأصبح 30 عميلاً في الساعة ، هل يمكن الإجابة على التساؤلات السابقة ؟ ولماذا ؟

٨ - إذا قررت إدارة المحل تحسين نوعية الخدمة بحيث يصبح معدل الخدمة 24 عميلاً في الساعة وذلك مقابل تكلفة رأسمالية متمثلة في زيادة عدد العاملين بالمحل ، المطلوب معرفة تأثير هذا القرار على مؤشرات صف الانتظار المبينة في كل من المطلوب (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦) ٠

الحــل :

معدل الوصول ، λ ، هو :

$$\lambda = 18 \text{ (عميل / ساعة)}$$

معدل الخدمة ، μ ، هو :

$$\mu = 20 \text{ (عميل / ساعة)}$$

١ - احتمال أن يكون المحل خاليا من أي عميل هو :

$$P(x=0) = P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{18}{20} = 0.10$$

٢ - احتمال وجود 4 عملاء بالمحل هو :

$$P(x=4) = P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \left(\frac{18}{20}\right)^4 (0.10) = 0.0656$$

هذه النتيجة تعني أن هناك احتمالا قدره 6.56% لأن يكون بالمحل أربعة عملاء .

٣ - متوسط عدد العملاء في المحل (أي في النظام) هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{18}{20 - 18} = 9 \text{ (عملاء)}$$

وهذا يعني أنه يتوقع وجود 9 عملاء في المحل أحدهم يتلقى الخدمة ويقف 8 عملاء في الصف منتظرين دورهم في أداء الخدمة .

٤ - متوسط عدد العملاء في صف الانتظار

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(18)^2}{20(20-18)} = 8.1 \quad (\text{عملاء})$$

وهذه النتيجة تتفق مع ما تم التوصل إليه في المطلوب (3) ٠

٥ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل هو :

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{20-18} = \frac{1}{2} \quad (\text{ساعة})$$

$$= \frac{1}{2} \times 60 = 30 \quad (\text{دقيقة})$$

٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{18}{20(20-18)} = \frac{9}{20} \quad (\text{ساعة})$$

$$= \frac{9}{20} \times 60 = 27 \quad (\text{دقيقة})$$

٧ - إذا كان معدل وصول العملاء إلى المحل هو 30 عميلاً في الساعة ، أي أن $\lambda = 30$ ، بينما $\mu = 20$ ، فهذا يعني أن معدل وصول العملاء ، λ ، أصبح أكبر من معدل خدمة العملاء ، μ ، والذي يعني أن :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{20} = 1.5 > 1$$

ويعني ذلك أن نظام الخدمة بالمحل أصبح غير ساكن أو مستقر لأن طول صف الانتظار سوف يزداد بلا حدود ، ومن ثم لا يمكن حساب أي من المتوسطات التي تم إيجادها في كل من المطلوب (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦) ٠

٨ - إذا أصبح معدل الخدمة هو :

$\mu = 24$ (عميل / ساعة)

بينما يظل معدل وصول العملاء ، λ ، كما هو ، حيث :

$\lambda = 18$ (عميل / ساعة)

فإن :

متوسط عدد العملاء في المحل هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{18}{24 - 18} = 3$$ (عملاء)

متوسط عدد العملاء في صف الانتظار هو :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(18)^2}{24(24 - 18)} = 2.25$$ (عميل)

متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل هو :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{24 - 18} = \frac{1}{6}$$ (ساعة)

$$= \frac{1}{6} \times 60 = 10$$ (دقائق)

متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{18}{24(24 - 18)} = \frac{1}{8}$$ (ساعة)

$$= \frac{1}{8} \times 60 = 7.5$$ (دقائق)

ويمكن عرض النتائج المتحصل عليها في جدول (٦ – ١) عندما يكون معدل الخدمة هو 20 عميلاً في الساعة وبعد أن يتم تحسين مستوى الخدمة لتصبح 24 عميلاً في الساعة كما يلي :

جدول (٦ – ١)

خصائص صف الانتظار	معدل الخدمة $\mu = 20$ (عميل / ساعة)	معدل الخدمة $\mu = 24$ (عميل / ساعة)
L_s : متوسط عدد العملاء في النظام	9 (عملاء)	3 (عملاء)
L_q : متوسط عدد العملاء في الصف	8.1 (عملاء)	2.25 (عميل)
W_s: متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام	30 (دقيقة)	10 (دقائق)
W_q: متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الصف	27 (دقيقة)	7.5 (دقائق)

وكما هو واضح من مقارنة النتائج فقد حدث تحسن ملموس في مستوى الخدمة انعكس في انخفاض متوسط عدد العملاء سواء في المحل أو في صف الانتظار وكذلك في انخفاض متوسط الوقت الذي يقضيه العميل سواء في المحل أو في صف الانتظار ، إلا أن ذلك مرتبط بالتكلفة الاقتصادية لكل من زيادة كفاءة مقدمي الخدمة أو زيادة عدد مراكز الخدمة واختيار البديل المناسب ، كما سنرى فيما بعد .

(٦-٣-٢) صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة على التوازي (M/M/K)

في هذا النموذج يوجد صف انتظار واحد وعدة مراكز خدمة نفرض أن عددها k كما يتضح من الشكل (٦ – ٢) ، لذلك يرمز لهذا النموذج بالمصطلح M/M/K ، ووفق هذا النظام فإن كل مركز من مراكز الخدمة الموجودة على

التوازي يقدم نفس نوعية الخدمة للعميل ، لذلك عندما يدخل العميل للنظام يتجه مباشرة إلى مركز الخدمة الخالي ، ومن ثم لن يتكون صف انتظار إلا إذا كان عدد العملاء في النظام اكبر من عدد مراكز الخدمة ، k .

وكما رأينا في البند السابق ان نموذج صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد يكون في حالة سكون أو استقرار إذا كان معدل وصول العملاء ، λ ، أقل من معدل أداء الخدمة ، μ . أما في هذا النموذج فإنه يكون في حالة سكون أو استقرار إذا كان معدل وصول العملاء ، λ ، أقل من حاصل ضرب معدل أداء الخدمة ، μ ، في عدد مراكز الخدمة ، k ، أي إذا تحققت العلاقة التالية .

$$\lambda < k\mu$$

حيث يشير حاصل الضرب $k\mu$ إلى أقصى معدل خدمة يمكن تقديمه للعملاء في جميع مراكز الخدمة .

وعن الفروض التي يبنى عليها هذا النموذج فإنها لا تختلف كثيراً عن الفروض التي يبنى عليها النموذج السابق إلا في بعض الفروض المميزة لهذا النموذج ، هذه الفروض يمكن إجمالها فيما يلي .

١ - صف انتظار واحد .

٢ - عدد مراكز الخدمة k .

٣ - طاقة النظام غير محدودة .

٤ - نظام خدمة العميل . من يحضر أولاً يخدم أولاً FIFO .

٥ - وصول العملاء هو متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط معدل وصول λ لكل وحدة زمنية .

٦ - زمن خدمة العميل هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسى بمتوسط معدل خدمة μ لكل وحدة زمنية •

٧ - معدل وصول العملاء أقل من حاصل ضرب عدد مراكز الخدمة في معدل خدمة العميل ، أي أن :

$$\lambda < k\mu$$

٨ - عدم تذمر العملاء بسبب طول صف الانتظار وعدم مغادرة العميل للصف متى تم دخوله وأن يكون وصول العملاء منفردين •

وبالطريقة نفسها سوف نعرض لأهم المؤشرات والمقاييس التي تساعد في فهم خصائص النظام دونما التركيز على التحليل الرياضي لكيفية اشتقاق هذه المؤشرات والمقاييس ، ومن هذه المؤشرات والمقاييس ما يلي :

١ - احتمال أن يكون النظام غير مشغول بعملاء (أي عاطلاً) هو :

$$P(x = 0) = P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

وتوجد جداول خاصة لحساب قيمة الاحتمال P_0 عندما يكون هناك عدد k من مراكز الخدمة ، حيث $k > 1$ ،.وتكون هي القيمة التي تقع عند ملتقى السطر μk والعمود k (جدول رقم 2 بالملحق) •

٢ - احتمال أن يكون النظام مشغولاً ويضطر العميل للانتظار في الصف هو :

$$P(x \geq k) = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)} P_0$$

٣ ـ متوسط عدد العملاء في النظام هو :

$$L_s = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

٤ ـ متوسط عدد العملاء في صف الانتظار هو :

$$L_q = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0$$

$$= L_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

٥ ـ متوسط وقت انتظار العميل في النظام هو :

$$W_s = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

٦ ـ متوسط وقت انتظار العميل في صف الانتظار هو :

$$W_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0$$

$$= W_s - \frac{1}{\mu}$$

مثال (٣) :

مأمورية الضرائب لديها أربعة مكاتب لاستقبال العملاء من الممولين لفحص إقراراتهم الضريبية وتحديد قيمة الضرائب المستحقة ، فإذا كان الممولون يصلون إلى المأمورية بمعدل 60 ممولاً على مدى 6 ساعات (يوم العمل) ، وقد تبين أن الزمن الذي تستغرقه خدمة العميل يتبع توزيع اسى بمتوسط 20 دقيقة للعميل الواحد ٠

المطلوب إيجاد ما يلي :

١ - احتمال أن تكون المأمورية خالية بدون خدمة ٠

٢ - احتمال أن تكون كل المكاتب بالمأمورية مشغولة ويضطر الممول أن ينتظر في صف انتظار ٠

٣ - متوسط عدد الممولين في المأمورية (أي في النظام) ٠

٤ - متوسط عدد الممولين المنتظرين للخدمة في صف الانتظار ٠

٥ - متوسط الوقت الذي يستغرقه الممول في المأمورية لأداء خدمته ٠

٦ - متوسط الوقت الذي يستغرقه الممول في صف الانتظار ٠

٧ - الوقت الإجمالي الذي يقضيه مأمور الضرائب في خدمة الممولين في الأسبوع (أي متوسط عدد الساعات التي يكون فيها مأمور الضرائب بالمأمورية مشغولاً في الأسبوع) ٠

الحـــل :

لدينا البيانات التالية ٠

عدد مراكز الخدمة هو k ، حيث : $k = 4$

معدل وصول الممولين في الساعة هو λ ، حيث :

$$\lambda = \frac{60}{6} = 10 \quad (\text{عميل / ساعة})$$

معدل خدمة الممول في الساعة هو μ ، حيث :

$$\mu = \frac{60}{20} = 3 \quad (\text{عميل / ساعة})$$

١ ـ احتمال أن تكون المأمورية خالية من الممولين (أي يكون النظام عاطلاً بدون خدمة) هو :

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{10}{3}\right)^3\right) + \left(\frac{1}{4!}\left(\frac{10}{3}\right)^4\left(\frac{12}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{3} + \frac{100}{18} + \frac{1000}{162}\right) + \left(\frac{10000}{1944}(6)\right)}$$

$$= \frac{1}{46.91} = 0.0213$$

أي أن هناك احتمالاً قدره 2.13% لأن تكون المأمورية خالية من الممولين .

ملحوظة :

يمكن إيجاد قيمة الاحتمال P_0 مباشرة من جدول رقم (2) بالملحق كما يلي :

حيث أن : $k = 4$ ، $\frac{\lambda}{k\mu} = \frac{10}{4 \times 3} = 0.83$ ،

فتكون قيمة P_0 هي القيمة الواقعة عند ملتقى السطر $\frac{\lambda}{k\mu} = 0.83$ والعمود $k = 4$ وهي تساوي 0.0219 . والفرق بين القيمتين راجعا بالطبع إلى عمليات التقريب .

٢ - بفرض أن عدد الممولين الموجودين بالمأمورية هو x ، فإن :

احتمال أن تكون كل المكاتب بالمأمورية مشغولة ويضطر العميل للانتظار في الصف هو :

$$P(x \geq k) = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)} P_0$$

$$= \frac{3\left(\frac{10}{3}\right)^4}{3!\,(12-10)} \times 0.0213 = 0.6574$$

٣ - متوسط عدد الممولين الموجودين في المأمورية (أي في النظام) هو :

$$L_s = \left(\frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} \right) P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \left(\frac{10 \times 3 \times \left(\frac{10}{3}\right)^4}{3!\,(12-10)^2} \right) (0.0213) + \frac{10}{3}$$

$= 3.28 + 3.33 = 6.61$ (ممولين)

٤ - متوسط عدد الممولين الموجودين في صف الانتظار هو :

$$L_q = \left(\frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} \right) P_0 = 3.28$$ (ممولين)

ويمكن حساب القيمة L_q كما يلي :

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = 6.61 - \frac{10}{3} = 3.28$$ (ممولين)

٥ - متوسط الوقت الذي يقضيه الممول في المأمورية (أي في النظام) لأداء خدمته هو :

$$W_s = \left(\frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)^2} \right) P_0 + \frac{1}{\mu}$$

$$= \left(\frac{3 \left(\frac{10}{3} \right)^4}{3!\,(12 - 10)^2} \right) (0.0213) + \frac{1}{3}$$

$$= 0.661 \quad (\text{ساعة})$$

$$= 39.66 \approx 40 \quad (\text{دقيقة})$$

٦ - متوسط الوقت الذي يقضيه الممول في الصف انتظاراً لأداء الخدمة هو :

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0.661 - 0.333 = 0.328 \quad (\text{ساعة})$$

$$= 19.68 \approx 20 \quad (\text{دقيقة})$$

٧ - لإيجاد الوقت الإجمالي الذي يقضيه مأمور الضرائب في خدمة العملاء (أي متوسط عدد الساعات التي يكون فيها مأمور الضرائب بالمأمورية مشغولاً في الأسبوع) فإن :

معامل الاستخدام هو :

$$\frac{\lambda}{k\mu} = \frac{10}{4 \times 3} = 0.833$$

متوسط عدد الساعات التي يقضيها مأمور الضرائب في خدمة الممولين في اليوم (6 ساعات عمل) هو :

$$6 \times 0.833 = 4.998 \quad (\text{ساعات})$$

متوسط عدد الساعات التي يقضيها مأمور الضرائب في خدمة الممولين في الأسبوع (6 أيام عمل) هو :

$$6 \times 4.998 = 29.988 \approx 30 \quad (\text{ساعة})$$

مثال (٤) :

إذا كان معدل وصول الطلاب إلى مكتبة الكلية لاستعارة الكتب يتم وفق توزيع بواسون بمعدل طالب كل 6 دقائق وخصصت المكتبة أثنين من موظفيها لخدمة الطلاب فيما يتعلق بعمليات الاستعارة ، وكان زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسى بمتوسط 10 دقائق لكل طالب • فإذا توقع مدير المكتبة أن عدد الطلاب المترددين على المكتبة لاستعارة الكتب سوف يزداد في الفترات المقبلة ، وفي المقابل قرر زيادة عدد الموظفين المخصصين لخدمة الطلاب في عمليات الاستعارة •

المطلوب :

إيجاد عدد الموظفين الإضافيين الذين يتم تخصيصهم لهذا الغرض إذا كان معدل وصول الطلاب إلى المكتبة سوف يتضاعف ، وفي نفس الوقت ترغب الإدارة في تخفيض زمن انتظار الطالب بالمكتبة إلى النصف •

الحـــل :

معدل وصول الطلاب إلى المكتبة هو λ ، حيث :

$$\lambda = \frac{1}{6} \quad (\text{طالب / دقيقة})$$

$$= \frac{1}{6} \times 60 = 10 \quad (\text{طلاب / ساعة})$$

معدل خدمة الطالب بالمكتبة هو μ ، حيث :

$$\mu = \frac{1}{10} \quad (\text{طالب / دقيقة})$$

$$= \frac{1}{10} \times 60 = 6 \quad (\text{طلاب / ساعة})$$

عدد موظفي الاستعارة = عدد مراكز الخدمة هو :

$$K = 2$$

نحسب أولا احتمال أن تكون المكتبة خالية من الطلاب وهو P_0 ، حيث :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{10}{6}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{6}\right)^2 \left(\frac{2 \times 6}{2 \times 6 - 10}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{3}\right) + \frac{25}{3}} = \frac{1}{\frac{33}{3}} = \frac{1}{11} = 0.091$$

متوسط وقت الانتظار للطالب في الصف هو :

$$W_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k - 1)!\,(k\mu - \lambda)^2} \times P_0$$

$$= \frac{6\left(\frac{10}{6}\right)^2}{1!\,(12 - 10)^2} \times 0.091 = 0.379 \text{ (ساعة)}$$

$$= 22.74 \text{ (دقيقة)}$$

وفقاً لتوقعات ورغبات إدارة المكتبة فإن :

معدل الوصول ، λ ، سوف يتضاعف ، أي يصبح كما يلي :

$\lambda = 20$ (طالباً / ساعة)

معدل الخدمة ، μ ، هو :

$\mu = 6$ (طلاب / ساعة)

بعد ذلك يتم حساب متوسط وقت انتظار الطالب في صف الانتظار للبدائل المختلفة لمراكز خدمة الطالب بالمكتبة حتى نصل إلى البديل الذي يحقق الهدف المنشود لإدارة المكتبة على النحو التالي :

البديل الأول : يـتم تخصـيص 3 موظفيـن فـي المكتـبة لخدمـة الطـلاب فـي عمليات الاستعارة ، أي أن : $k = 3$

معامل الاستخدام في هذه الحالة هو :

$$\frac{\lambda}{k\mu} = \frac{20}{3 \times 6} = \frac{10}{9} > 1$$

وحيث أن قيمة معامل الاستخدام تزيد عن الواحد الصحيح فيكون النظام في حالة عدم استقرار ، حيث يزداد طول صف الانتظار في هذه الحالة بلا حدود لذلك فإن هذا البديل سوف يرفض •

البديل الثاني : يـتم تخصـيص 4 موظفيـن فـي المكتـبة لخدمـة الطـلاب فـي عمليات الاستعارة ، أي أن : $k = 4$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}\left(\frac{20}{6}\right)^n + \frac{1}{4!}\left(\frac{20}{6}\right)^4\left(\frac{24}{24 - 20}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \frac{10}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{10}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{10}{3}\right)^4 (6)}$$

$$= 0.0213$$

متوسط وقت الانتظار للطالب في الصف هو :

$$W_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k - 1)!\,(k\mu - \lambda)^2} \times P_0$$

$$= \frac{6\left(\frac{20}{6}\right)^4}{3!\,(24 - 20)^2} \times 0.0213 = 0.164 \ (\text{ساعة})$$

$$= 9.86 \ (\text{دقائق})$$

وهذا المتوسط يكون أقل من نصف متوسط وقت الانتظار الحالي للطالب والذي يساوي 22.74 دقيقة ، أي أن هذا البديل يحقق الهدف الذي تسعى إليه إدارة المكتبة • ويكون القرار الأمثل هو : تخصيص أثنين إضافيين من موظفي المكتبة إلى الاثنين الأصليين ، بمعنى أن يصبح عدد الموظفين الإجمالي المخصص لخدمة أغراض الاستعارة بالمكتبة هو 4 موظفين •

(٦-٤) تحليل التكاليف لصفوف الانتظار

عند تصميم نظام صف انتظار معين فإن الإدارة ترغب في معرفة التكلفة الاقتصادية لأنظمة صفوف الانتظار التي يمكنها أن تختار واحداً من بينها ، حيث يتم حساب التكلفة الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة ، ثم تختار النظام الذي يحقق أدنى تكلفة كلية متوقعة ويحقق في نفس الوقت مستوى الخدمة الذي تسعى الإدارة إلى تحقيقه •

ويلاحظ أن التكلفة الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة عبارة عن مجموع التكلفة الكلية للخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة والتكلفة الكلية للانتظار في الوحدة الزمنية الواحدة ، أي أن :

التكاليف الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة = التكلفة الكلية لتقديم الخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة + التكلفة الكلية للانتظار في الوحدة الزمنية الواحدة ٠

أي أن :

$$TC = TC_s + TC_w$$

حيث : TC عبارة عن التكاليف الكلية لتشغيل النظام في الوحدة الزمنية الواحدة

TC_s عبارة عن التكلفة الكلية لتقديم الخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة

TC_w عبارة عن التكلفة الكلية للانتظار في الوحدة الزمنية الواحدة

وإذا فرضنا أن تكلفة تقديم الخدمة في الوحدة الزمنية الواحدة للمركز الواحد هي C_s ، وأن k تمثل عدد مراكز الخدمة في النظام ، فإن :

التكلفة الكلية للخدمة في وحدة الزمن الواحدة هي :

$$TC_s = k \times C_s$$

وبفرض أن تكلفة انتظار العميل الواحد في الوحدة الزمنية الواحدة هي C_w ، وأن متوسط عدد العملاء في النظام هو L_s ، فإن :

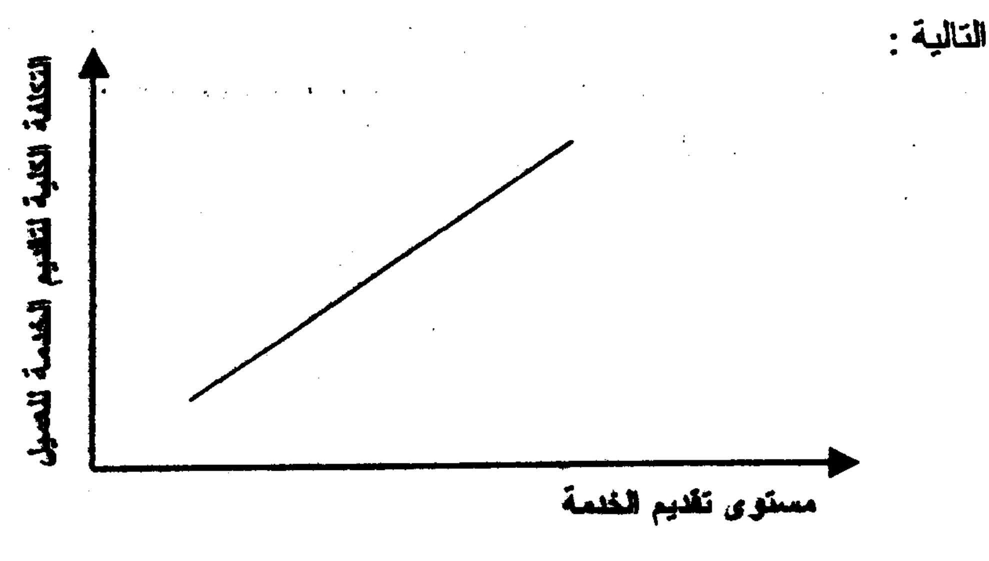
التكلفة الكلية للانتظار في وحدة الزمن الواحدة هي :

$$TC_w = C_w \times L_s$$

العلاقة بين التكلفة الكلية لتقديم الخدمة ، TC_s ، والتكلفة الكلية للانتظار ، TC_w

يلاحظ أن كل من تكلفة تقديم الخدمة للعميل وتكلفة انتظار العميل يعد دالة في مستوى تقديم الخدمة ٠

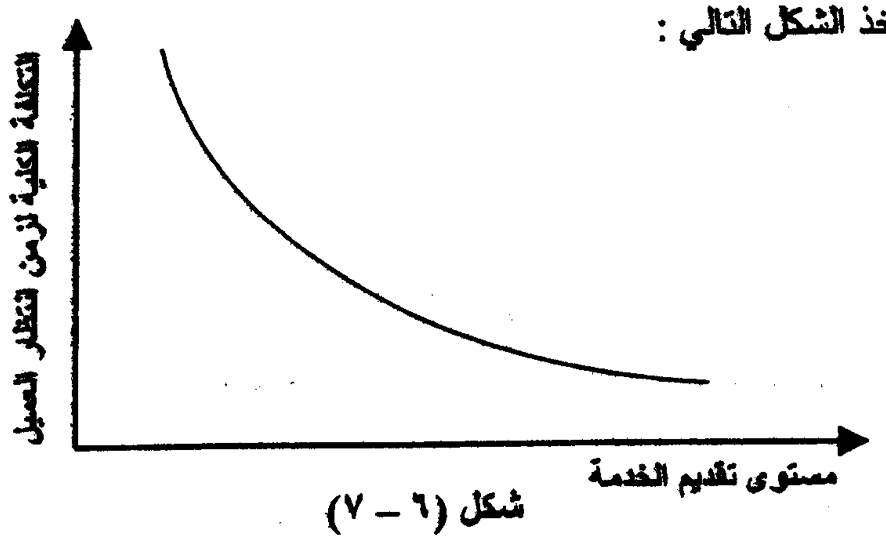
فالعلاقة بين مستوى تقديم الخدمة والتكلفة الكلية للخدمة تأخذ الصورة التالية :



شكل (٦ ــ ٦)

وكما هو واضح فإن العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة والتكلفة الكلية لتقديم الخدمة علاقة طردية ، فكلما زاد مستوى تقديم الخدمة للعميل كلما زادت التكلفة الكلية لتقديم تلك الخدمة .

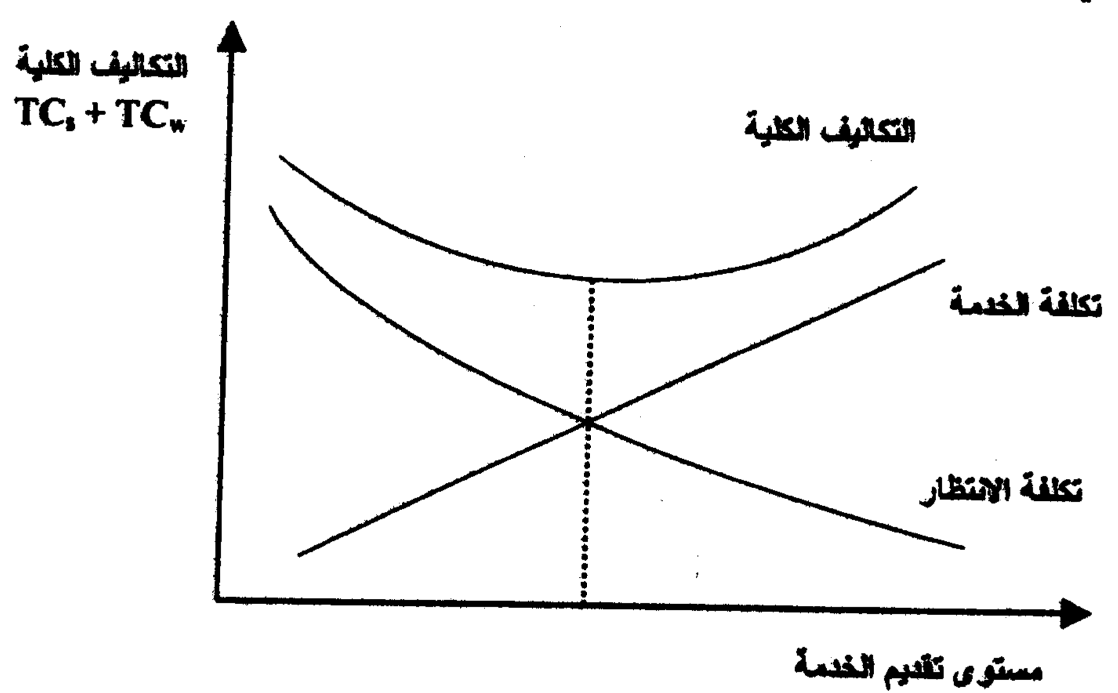
أما العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة للعميل والتكلفة الكلية لزمن انتظار العميل فتأخذ الشكل التالي :



شكل (٦ ــ ٧)

فكما هو واضح من الشكل (٦ – ٧) أنه بزيادة مستوى تقديم الخدمة للعميل فإن زمن انتظار العميل في صف الانتظار سوف يقل مما يعني انخفاض التكلفة الكلية لانتظار العميل في النظام .

وكما هو واضح فإن العاملين السابقين يخلقان ضغوطاً متناقضة بالنسبة للإدارة أو لمتخذي القرار ، حيث أن خفض تكلفة تقديم الخدمة للعميل يستلزم أدنى مستوى ممكنة للخدمة ، بينما هدف خفض زمن انتظار العميل يتطلب مستوى خدمة عالي . لذلك يجب التوصل إلى حل وسط يجمع بين هذين العاملين في الشكل التالي :



شكل (٦ – ٨)

وعلى عكس ما يبدو للوهلة الأولى من أن تقدير التكلفة يعد أمراً بسيطاً فإن هناك صعوبة حقيقية تواجه الإدارة في تقدير كل من إجمالي تكاليف الخدمة ، TC_s ، للوحدة الزمنية الواحدة ، وإجمالي تكاليف انتظار العملاء ،

TC_w ، للوحدة الزمنية الواحدة • ولعل تقدير تكلفة الانتظار تعد أكثر صعوبة وتحتاج إلى اعتبارات عديدة كما تختلف طريقة تقديرها من منشأة إلى أخرى ، فحساب تكلفة انتظار رجل أعمال مهم في أحد البنوك تختلف بالطبع عن تكلفة انتظار آلة عاطلة للإصلاح داخل مصنع ، وكلاهما يختلف عن تكلفة انتظار مريض داخل عيادة الطبيب وهكذا •

مثال (٥) :

شركة مطاحن شرق الدلتا تملك عدد من سيارات الشحن والتي تصل إليها محملة بالقمح وفق توزيع بواسون بمعدل سيارتين في اليوم • ويوجد لدى الشركة عدد من العمال يقومون بتفريغ السيارات المعبأة بواقع 0.5 سيارة للعامل الواحد في اليوم ، فإذا كان كل عامل من هؤلاء العمال يتقاضى في اليوم 40 جنيها وكل سيارة شحن لا يتم تفريغها (بسبب انتهاء يوم العمل) تكلف الشركة 300 جنيه في اليوم •

المطلوب :

تحديد عدد العمال الذين يجب تشغيلهم في الشركة والذي يجعل مجموع تكاليف التفريغ والانتظار أقل ما يمكن •

الحـــل :

معدل وصول السيارات هو λ ، حيث :

$\lambda = 2$ (سيارة / يوم)

معدل أداء الخدمة للسيارة هو μ ، حيث :

$\mu = 0.5\ x$ (سيارة / يوم)

حيث x تشير إلى عدد عمال التفريغ في الشركة ٠

إجمالي تكلفة الخدمة في اليوم = إجمالي تكلفة تفريغ السيارة في اليوم

هو :

$$TC_s = 40\ x$$

إجمالي تكلفة الانتظار في اليوم هو :

$$TC_w = C_w\ L_s$$

حيث :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{0.5x - 2}$$

$C_w = 300$ (جنيه)

إذن :

$$TC_w = 300\left(\frac{2}{0.5x - 2}\right) = \frac{600}{0.5x - 2}$$

وبالتالي فإن :

التكاليف الكلية في اليوم هي :

$$TC = TC_s + TC_w$$

$$= 40x + \frac{600}{0.5x - 2}$$

ولكي يكون النظام في حالة استقرار فيجب أن تتحقق العلاقة التالية :

$$\lambda < \mu$$

أي :

$$2 < 0.5\,x$$

أي :

$$x > 4$$

وهذا يعني أنه لكي يكون النظام في حالة سكون أو استقرار فإن عدد عمال التفريغ بالشركة يجب ألا يقل عن 5 عمال ، وسوف يتم حساب التكاليف الكلية للتشغيل في اليوم في حالة تشغيل أعداد مختلفة من العمال على النحو التالي :

البديل الأول : تشغيل 5 عمال للتفريغ (أي أن : x = 5)

$$TC_5 = 40 \times 5 + \frac{600}{0.5(5) - 2} =$$

$$= 200 + 1200 = 1400 \text{ (جنيه)}$$

البديل الثاني : تشغيل 6 عمال للتفريغ (أي أن : x = 6)

$$TC_6 = 40 \times 6 + \frac{600}{0.5(6) - 2}$$

$$= 240 + 600 = 840 \text{ (جنيهاً)}$$

البديل الثالث : تشغيل 7 عمال للتفريغ (أي أن : x = 7)

$$TC_7 = 40 \times 7 + \frac{600}{0.5(7) - 2}$$

$$= 280 + 400 = 680 \text{ (جنيهاً)}$$

البديل الرابع : تشغيل 8 عمال للتفريغ (أي أن : x = 8)

$$TC_8 = 40 \times 8 + \frac{600}{0.5(8) - 2}$$

$$= 320 + 300 = 620$$ (جنيها)

البديل الخامس : تشغيل 9 عمال للتفريغ (أي أن : x = 9)

$$TC_9 = 40 \times 9 + \frac{600}{0.5(9) - 2}$$

$$= 360 + 240 = 600$$ (جنيه)

البديل السادس : تشغيل 10 عمال للتفريغ (أي أن : x = 10)

$$TC_{10} = 40 \times 10 + \frac{600}{0.5(10) - 2}$$

$$= 400 + 200 = 600$$ (جنيه)

البديل السابع : تشغيل 11 عامل للتفريغ (أي أن : x = 11)

$$TC_{11} = 40 \times 11 + \frac{600}{0.5(11) - 2}$$

$$= 440 + 171.43 = 611.43$$ (جنيها)

البديل الثامن : تشغيل 12 عامل للتفريغ (أي أن : x = 12)

$$TC_{12} = 40 \times 12 + \frac{600}{0.5(12) - 2}$$

$$= 480 + 150 = 630$$ (جنيها)

بمقارنة البدائل المختلفة يتضح أن عدد عمال التفريغ الأمثل الذين يجب تشغيلهم في الشركة هو 9 أو 10 عمال يومياً ، حيث تكون أصغر تكلفة تشغيل هي 600 جنيه في اليوم •

مثال (٦) :

في أحد البنوك يوجد موظف واحد لصرف الشيكات للعملاء بالبنك ولاحظ مدير البنك كثرة عدد المترددين على البنك من العملاء لصرف الشيكات حيث أن وصول العملاء إلى البنك يتم وفق توزيع بواسون بمعدل 20 عميلاً في الساعة ، وأن كل موظف يستطيع أن يصرف الشيك في زمن يتبع التوزيع الأسي بمتوسط شيك واحد في 5 دقائق ، ووجد أن تكلفة انتظار العميل تساوي 0.25 جنيه لكل دقيقة وأن تكلفة موظف الاستقبال تعادل 10 جنيهات في الساعة • لذلك فكر مدير البنك في تحسين مستوى هذه الخدمة بالبنك وذلك عن طريق زيادة عدد الموظفين الذين يقومون بهذه الخدمة ، وعرض على المدير البديلين التاليين :

١ - تعيين أثنين من الموظفين •

٢ - تعيين ثلاثة من الموظفين •

المطلوب :

مساعدة مدير البنك في اختيار البديل الأفضل •

الحـــل :

سوف يختار مدير البنك البديل الذي يحقق أقل تكاليف كلية ممكنة لتشغيل النظام •

معدل وصول العملاء ، λ ، هو :

$$\lambda = 20 \text{ (عميلاً / ساعة)}$$

معدل الخدمة ، μ ، هو :

$$\mu = 60 \div 5 = 12 \text{ (عميلاً / ساعة)}$$

تكلفة انتظار العميل الواحد في الساعة هي :

$$C_w = 60 \times 0.25 = 15 \text{ (جنيها / ساعة)}$$

البديل الأول : تعيين أثنين من الموظفين

وهذا يعني وجود مركزين للخدمة ، حيث $k = 2$

نوجد أولاً احتمال أن يكون البنك خالياً من العملاء وهو P_0 ، حيث :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{20}{12}\right)^n + \frac{1}{2!}\left(\frac{20}{12}\right)^2\left(\frac{2 \times 12}{2 \times 12 - 20}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{2 \times 9}(6)} = \frac{1}{\frac{33}{3}} = \frac{3}{33}$$

$$= 0.091$$

متوسط عدد العملاء طالبي الخدمة في الساعة في البنك هو :

$$L_s = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)\ !\ (k\mu-\lambda)^2}(P_0)+\frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{20(12)\left(\frac{20}{12}\right)^2}{1!\,(2\ \times\ 12\ -\ 20)^2}\ (0.091)\ +\ \frac{20}{12}$$

$= 5.39$ (عملاء)

التكلفة الكلية للانتظار في الساعة هي :

$TC_w = C_w \times L_s = 15 \times 5.39 = 80.85$ (جنيهاً / ساعة)

التكلفة الكلية للخدمة في الساعة هي :

$TC_s = 2 \times 10 = 20$ (جنيهاً / ساعة)

التكاليف الكلية للتشغيل في الساعة هي :

$TC = TC_w + TC_s$

$= 80.85 + 20 = 100.85$ (جنيهاً / ساعة)

البديل الثاني : تعيين ثلاثة موظفين

وهذا يعني وجود ثلاثة مراكز للخدمة ، حيث $k = 3$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}\left(\frac{20}{12}\right)^n + \frac{1}{3!}\left(\frac{20}{12}\right)^3\left(\frac{3 \times 12}{3 \times 12 - 20}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{18}\right) + \frac{125}{72}} \doteq 0.173$$

متوسط عدد العملاء طالبي الخدمة في الساعة في البنك هو :

$$L_s = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{20 \times 12\left(\frac{20}{12}\right)^2}{2!\,(3 \times 12 - 20)^2} \times (0.173) + 1.67$$

$= 0.375 + 1.67 = 2.045$ (عميل)

التكالفة الكلية للانتظار في الساعة هي :

$TC_w = C_w \times L_s = 15 \times 2.045 = 30.675$ (جنيها / ساعة)

التكالفة الكلية للخدمة في الساعة هي :

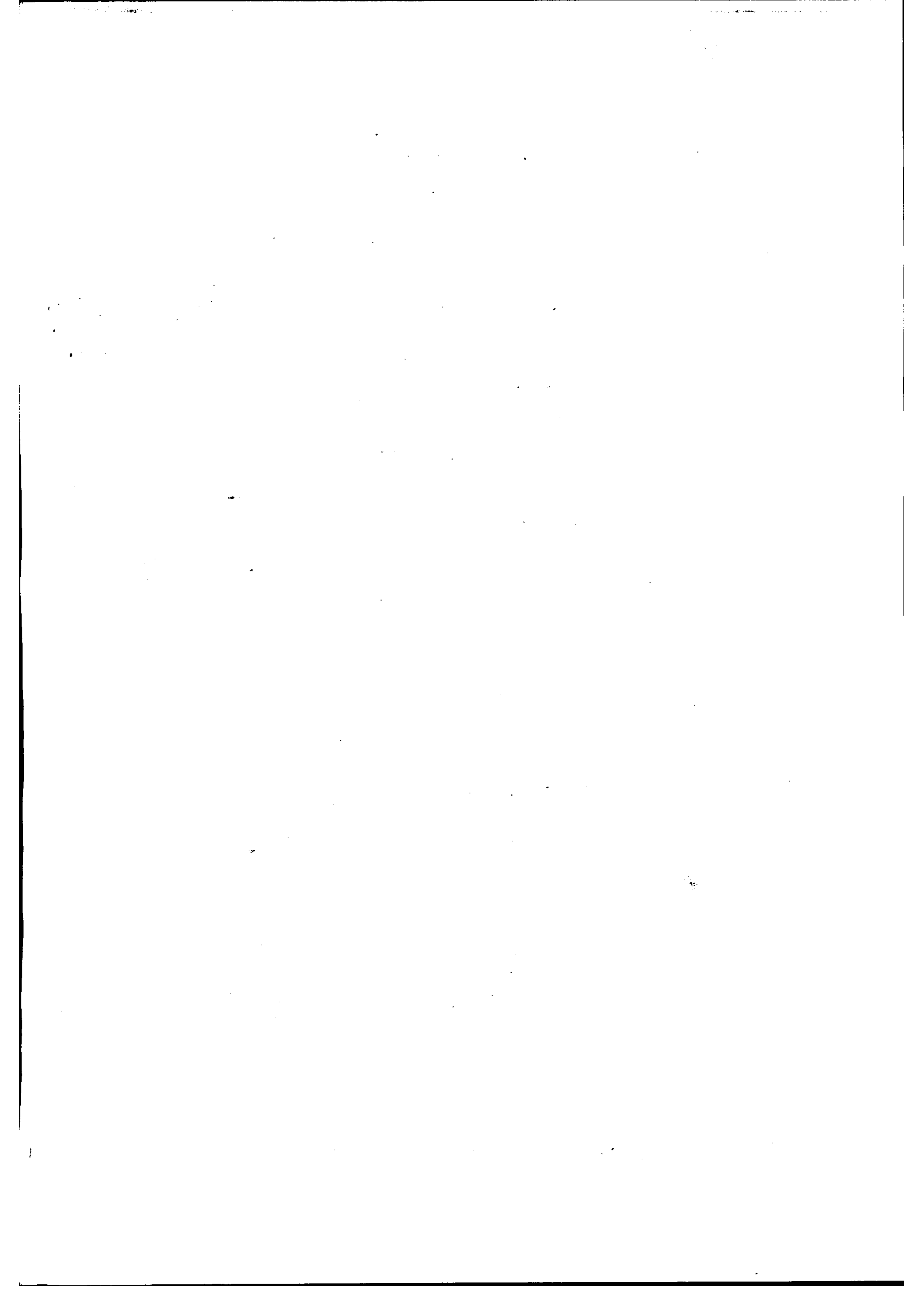
$TC_s = 3 \times 10 = 30$ (جنيها / ساعة)

التكاليف الكلية للتشغيل في الساعة هي :

$$TC = TC_w + TC_s$$

$$= 30.675 + 30 = 60.675$$ (جنيها / ساعة)

وحيث أن التكاليف الكلية للتشغيل وفقاً للبديل الثاني والتي تبلغ 60.675 جنيهاً / ساعة أقل من التكاليف الكلية للتشغيل وفقاً للبديل الأول والتي تبلغ 80.85 جنيهاً / ساعة ، لذلك يكون من الأفضل لمدير البنك أن يعين ثلاثة موظفين لخدمة صرف الشيكات للعملاء ،



جدول (١) التوزيع الطبيعي المعيارى

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0190	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2624	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2969	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3313
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4969
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4988
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

جدول (٢)

P_o for Multiple Channel Queues

Number of Channels, S							
$\frac{\lambda}{S\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.01	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324
02	0.9800	0.9608	0.9418	0.9231	0.9048	0.8869	0.8694
.03	0.9700	0.9417	0.9139	0.8869	0.8607	0.8353	0.8106
.04	0.9600	0.9231	0.8869	0.8521	0.8187	0.7866	0.7558
.05	0.9500	0.9048	0.8607	0.8187	0.7788	0.7408	0.7047
.06	0.9400	0.8868	0.8353	0.7866	0.7408	0.6977	0.6570
.07	0.9300	0.8692	0.8106	0.7558	0.7047	0.6570	0.6126
.08	0.9200	0.8519	0.7866	0.7261	0.6703	0.6188	0.5712
.09	0.9100	0.8349	0.7633	0.6977	0.6376	0.5827	0.5326
.10	0.9000	0.8182	0.7407	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966
.11	0.8900	0.8018	0.7188	0.6440	0.5769	0.5169	0.4630
.12	0.8800	0.7857	0.6975	0.6188	0.5488	0.4868	0.4317
.13	0.8700	0.7699	0.6769	0.5945	0 5220	0.4584	0.4025
.14	0.8600	0.7544	0.6568	0.5712	0.4966	0.4317	0.3753
.15	0.8500	0.7391	0.6373	0.5487	0.4724	0.4066	0.3499
.16	0.8400	0.7241	0.6184	0.5272	0.4493	0.3829	0.3263
.17	0.8300	0.7094	0.6000	0.5065	0.4274	0.3606	0.3042
.18	0.8200	0.6949	0.5821	0.4866	0.4065	0.3396	0.2837
.19	0.8100	0.6807	0.5648	0.4675	0.3867	0.3198	0.2645
.20	0.8000	0.6667	0.5479	0.4491	0.3678	0.3012	0.2466
.21	0.7900	0.6529	0.5316	0.4314	0.3499	0.2836	0.2299
.22	0.7800	0.6393	0.5157	0.4145	0.3328	0.2671	0.2144
.23	0.7700	0.6260	0.5002	0.3981	0.3165	0.2515	0.1999
24	0.7600	0.6129	0.4852	0.3824	0.3011	0.2369	0.1864
.25	0.7500	0.6000	0.4706	0.3673	0.2863	0.2231	0.1738
.26	0.7400	0.5873	0.4564	0.3528	0.2723	0.2101	0.1620
.27	0.7300	0.5748	0.4426	0.3389	0.2590	0.1978	0.1510
.28	0.7200	0.5625	0.4292	0.3255	0.2463	0.1863	0.1408
.29	0.7100	0.5504	0.4161	0.3126	0.2343	0.1754	0 1313
.30	0.7000	0.5385	0.4035	0.3002	0.2228	0.1652	0.1224
31	0.6900	0.5267	0.3911	0.2882	0.2118	0 1555	0 1141
32	0 6800	0.5152	0.3791	0.2768	0.2014	0 1464	0.1064
33	0 6700	0 5038	0 3675	0 2657	0 1915	0 137	0 0992

تابع جدول (۲)

Number of Channels, S ***(continued)***

$\frac{\lambda}{s\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.34	0.6600	0.4925	0.3561	0.2551	0.1821	0.1298	0.0925
.35	0.6500	0.4815	0.3451	0.2449	0.1731	0.1222	0.0862
.36	0.6400	0.4706	0.3343	0.2351	0.1646	0.1151	0.0804
.37	0.6300	0.4599	0.3238	0.2256	0.1565	0.1083	0.0749
.38	0.6200	0.4493	0.3137	0.2165	0.1487	0.1020	0.0698
.39	0.6100	0.4388	0.3038	0.2077	0.1413	0.0960	0.0651
.40	0.6000	0.4286	0.2941	0.1993	0.1343	0.0903	0.0606

Number of Channels, S

$\frac{\lambda}{S\mu}$	8	9	10	11	12	13	14	15
.01	0.9231	0.9139	0.9048	0.8958	0.8869	0.8781	0.8694	0.8607
.02	0.8521	0.8353	0.8187	0.8025	0.7866	0.7711	0.7558	0.7408
.03	0.7866	0.7634	0.7408	0.7189	0.6977	0.6771	0.6570	0.6376
.04	0.7262	0.6977	0.6703	0.6440	0.6188	0.5945	0.5712	0.5488
.05	0.6703	0.6376	0.6065	0.5770	0.5488	0.5220	0.4966	0.4724
.06	0.6188	0.5827	0.5488	0.5169	0.4868	0.4584	0.4317	0.4066
.07	0.5712	0.5326	0.4966	0.4630	0.4317	0.4025	0.3753	0.3499
.08	0.5273	0.4868	0.4493	0.4148	0.3829	0.3535	0.3263	0.3012
.09	0.4868	0.4449	0.4066	0.3716	0.3396	0.3104	0.2837	0.2592
.10	0.4493	0.4066	0.3679	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231
.11	0.4148	0.3716	0.3329	0.2982	0.2671	0.2393	0.2144	0.1921
.12	0.3829	0.3396	0.3012	0.2671	0.2369	0.2101	0.1864	0.1653
.13	0.3535	0.3104	0.2725	0.2393	0.2101	0.1845	0.1620	0.1423
.14	0.3263	0.2837	0.2466	0.2144	0.1864	0.1620	0.1409	0.1225
.15	0.3012	0.2592	0.2231	0.1921	0.1653	0.1423	0.1225	0.1054
.16	0.2780	0.2369	0.2019	0.1720	0.1466	0.1249	0.1065	0.0907
.17	0.2567	0.2165	0.1827	0.1541	0.1300	0.1097	0.0926	0.0781
.18	0.2369	0.1979	0.1653	0.1381	0.1153	0.0963	0.0805	0.0672
.19	0.2187	0.1809	0.1496	0.1237	0.1023	0.0846	0.0699	0.0578
.20	0.2019	0.1653	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498
.21	0.1864	0.1511	0.1225	0.0993	0.0805	0.0652	0.0529	0.0429
.22	0.1720	0.1381	0.1108	0.0889	0.0714	0.0573	0.0460	0.0369
.23	0.1588	0.1262	0.1003	0.0797	0.0633	0.0503	0.0400	0.0317
.24	0.1466	0.1153	0.0907	0.0714	0.0561	0.0442	0.0347	0.0273
.25	0.1353	0.1054	0.0821	0.0639	0.0498	0.0388	0.0302	0.0235
.26	0.1249	0.0963	0.0743	0.0573	0.0442	0.0340	0.0263	0.0202
.27	0.1153	0.0880	0.0672	0.0513	0.0392	0.0299	0.0228	0.0174
.28	0.1064	0.0805	0.0608	0.0460	0.0347	0.0263	0.0198	0.0150
.29	0.0983	0.0735	0.0550	0.0412	0.0308	0.0231	0.0172	0.0129
.30	0.0907	0.0672	0.0498	0.0369	0.0273	0.0202	0.0150	0.0111
.31	0.0837	0.0614	0.0450	0.0330	0.0242	0.0178	0.0130	0.0096
.32	0.0773	0.0561	0.0408	0.0296	0.0215	0.015[illegible]	0.0113	0.0082
.33	0.0713	0.0513	0.0369	0.0265	0.0191	0.0137	0.0099	0.0071
.34	0.0658	0.0469	0.0334	0.0238	0.0169	0.0120	0.0086	0.0061
.35	0.0608	0.0428	0.0302	0.0213	0.0150	0.0106	0.0074	0.0052
.36	0.0561	0.0391	0.0273	0.0191	0.0133	0.0093	0.0065	0.0045
.37	0.0518	0.0358	0.0247	0.0171	0.0118	0.0081	0.0056	0.0039
.38	0.0478	0.0327	0.0224	0.0153	0.0105	0[illegible]	0.0049	0.0033
.39	0.0441	0.0299	0.0202	0.0137	0.0093	0.0063	0.0043	0.0029
.40	0.0407	0.0273	0.0183	0.0123	0.0082	0.0055	0.0037	0.0025

تابع جدول (۲)

Number . Channels, S							
$\frac{\lambda}{s\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.41	0.5900	0.4184	0.2847	0.1912	0.1276	0.0850	0.0565
.42	0.5800	0.4085	0.2756	0.1834	0.1213	0.0800	0.0527
.43	0.5700	0.3986	0.2667	0.1758	0.1152	0.0753	0.0491
.44	0.5600	0.3889	0.2580	0.1686	0.1094	0.0708	0.0457
.45	0.5500	0.3793	0.2496	0.1616	0.1039	0.0666	0.0426
.46	0.5400	0.3699	0.2414	0.1549	0.0987	0.0626	0.0397
.47	0.5300	0.3605	0.2333	0.1484	0.0937	0.0589	0.0370
.48	0.5200	0.3514	0.2255	0.1422	0.0889	0.0554	0.0344
.49	0.5100	0.3423	0.2179	0.1362	0.0844	0.0521	0.0321
.50	0.5000	0.3333	0.2105	0.1304	0.0801	0.0490	0.0298
.51	0.4900	0.3245	0.2033	0.1249	0.0760	0.0460	0.0278
.52	0.4800	0.3158	0.1963	0.1195	0.0721	0.0432	0.0259
.53	0.4700	0.3072	0.1894	0.1143	0.0683	0.0406	0.0241
.54	0.4600	0.2987	0.1827	0.1094	0.0648	0.0381	0.0224
.55	0.4500	0.2903	0.1762	0.1046	0.0614	0.0358	0.0208
.56	0.4400	0.2821	0.1699	0.0999	0.0581	0.0336	0.0194
.57	0.4300	0.2739	0.1637	0.0955	0.0551	0.0315	.00194
.58	0.4200	0.2658	0.1576	0.0912	0.0521	0.0296	0.0180
.59	0.4100	0.2579	0.1517	0.0870	0.0493	0.0277	0.0167
.60	0.4000	0.2500	0.1460	0.0831	0.0466	0.0260	0.0155
.61	0.3900	0.2422	0.1404	0.0792	0.0441	0.0244	0.0144
.62	0.3800	0.2346	0.1349	0.0755	0.0417	0.0228	0.0134
.63	0.3700	0.2270	0.1296	0.0719	0.0394	0.0214	0.0124
.64	0.3600	0.2195	0.1244	0.0685	0.0372	0.0200	0.0115
.65	0.3500	0.2121	0.1193	0.0651	0.0350	0.0187	0.0107
.66	0.3400	0.2048	0.1143	0.0619	0.0330	0.0175	0.0099
.67	0.3300	0.1976	0.1095	0.0588	0.0311	0.0163	0.0092
.68	0.3200	0.1905	0.1048	0.0559	0.0293	0.0152	0.0085
.69	0.3100	0.1834	0.1002	0.0530	0.0276	0.0142	0.0079
.70	0.3000	0.1765	0.0957	0.0502	0.0259	0.0132	0.0073
.71	0.2900	0.1696	0.0913	0.0475	0.0243	0.0123	0.0067
.72	0.2800	0.1628	0.0870	0.0450	0.0228	0.0114	0.0062
.73	0.2700	0.1561	0.0828	0.0425	0.0214	0.0106	0.0057
.74	0.2600	0.1494	0.0788	0.0401	0.0200	0.0099	0.0053
.75	0.2500	0.1429	0.0748	0.0377	0.0187	0.0091	0.0048
.76	0.2400	0.1364	0.0709	0.0355	0.0174	0.0085	0.0044
.77	0.2300	0.1299	0.0671	0.0333	0.0162	0.0078	0.0041
.78	0.2200	0.1236	0.0634	0.0313	0.0151	0.0072	0.0037
.79	0.2100	0.1173	0.0597	0.0292	0.0140	0.0066	0.0034

تابع جدول (۲)

$\frac{\lambda}{s\mu}$	8	9	10	11	12	13	14	15
Number of Channels, s								
.41	0.0376	0.0249	0.0166	0.0110	0.0073	0.0048	0.0032	0.0021
.42	0.0347	0.0228	0.0150	0.0098	0.0065	0.0043	0.0028	0.0018
.43	0.0320	0.0208	0.0136	0.0088	0.0057	0.0037	0.0024	0.0016
.44	0.0295	0.0190	0.0123	0.0079	0.0051	0.0033	0.0021	0.0014
.45	0.0272	0.0174	0.0111	0.0071	0.0045	0.0029	0.0018	0.0012
.46	0.0251	0.0159	0.0100	0.0063	0.0040	0.0025	0.0016	0.0010
.47	0.0232	0.0145	0.0091	0.0057	0.0035	0.0022	0.0014	0.0009
.48	0.0214	0.0132	0.0082	0.0051	0.0031	0.0019	0.0012	0.0007
.49	0.0197	0.0121	0.0074	0.0045	0.0028	0.0017	0.0010	0.0006
.50	0.0182	0.0110	0.0067	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006
.51	0.0167	0.0101	0.0061	0.0036	0.0022	0.0013	0.0008	0.0005
.52	0.0154	0.0092	0.0055	0.0033	0.0019	0.0012	0.0007	0.0004
.53	0.0142	0.0084	0.0050	0.0029	0.0017	0.0010	0.0006	0.0004
.54	0.0131	0.0077	0.0045	0.0026	0.0015	0.0009	0.0005	0.0003
.55	0.0121	0.0070	0.0040	0.0023	0.0014	0.0008	0.0005	0.0003
.56	0.0111	0.0064	0.0037	0.0021	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002
.57	0.0102	0.0058	0.0033	0.0019	0.0011	0.0006	0.0003	0.0002
.58	0.0094	0.0053	0.0030	0.0017	0.0009	0.0005	0.0003	0.0002
.59	0.0087	0.0048	0.0027	0.0015	0.0008	0.0005	0.0003	0.0001
.60	0.0080	0.0044	0.0024	0.0013	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001
.61	0.0073	0.0040	0.0022	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001
.62	0.0068	0.0037	0.0020	0.0011	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001
.63	0.0062	0.0033	0.0018	0.0010	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001
.64	0.0057	0.0030	0.0016	0.0009	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
.65	0.0052	0.0028	0.0015	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001
.66	0.0048	0.0025	0.0013	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000
.67	0.0044	0.0023	0.0012	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000
.68	0.0040	0.0021	0.0011	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000
.69	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
.70	0.0034	0.0017	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
.71	0.0031	0.0015	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
.72	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
.73	0.0026	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
.74	0.0024	0.0011	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
.75	0.0021	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
.76	0.0019	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.77	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.78	0.0016	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.79	0.0015	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

تابع جدول (۲)

Number of Channels, S							
$\frac{\lambda}{s\mu}$	1	2	3	4	5	6	7
.80	0.2000	0.1111	0.0562	0.0273	0.0130	0.0061	0.0028
.81	0.1900	0.1050	0.0527	0.0254	0.0120	0.0056	0.0026
.82	0.1800	0.0989	0.0493	0.0236	0.0111	0.0051	0.0023
.83	0.1700	0.0929	0.0460	0.0219	0.0102	0.0047	0.0021
.84	0.1600	0.0870	0.0428	0.0202	0.0093	0.0042	0.0019
.85	0.1500	0.0811	0.0396	0.0186	0.0085	0.0038	0.0017
.86	0.1400	0.0753	0.0366	0.0170	0.0077	0.0035	0.0015
.87	0.1300	0.0695	0.0335	0.0155	0.0070	0.0031	0.0014
.88	0.1200	0.0638	0.0306	0.0140	0.0063	0.0028	0.0012
.89	0.1100	0.0582	0.0277	0.0126	0.0056	0.0024	0.0011
.90	0.1000	0.0526	0.0249	0.0113	0.0050	0.0021	0.0009
.91	0.0900	0.0471	0.0222	0.0099	0.0043	0.0019	0.0008
.92	0.0800	0.0417	0.0195	0.0087	0.0038	0.0016	0.0007
.93	0.0700	0.0363	0.0168	0.0075	0.0032	0.0014	0.0006
.94	0.0600	0.0309	0.0143	0.0063	0.0027	0.0011	0.0005
.95	0.0500	0.0256	0.0118	0.0051	0.0022	0.0009	0.0004
.96	0.0400	0.0204	0.0093	0.0040	0.0017	0.0007	0.0003
.97	0.0300	0.0152	0.0069	0.0030	0.0012	0.0005	0.0002
.98	0.0200	0.0101	0.0045	0.0019	0.0008	0.0003	0.0001
.99	0.0100	0.0050	0.0022	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001

$\frac{\lambda}{s\mu}$	8	9	10	11	12	13	14	15
.80	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.81	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
.82	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.83	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.84	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.85	0.0008	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.86	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.87	0.0006	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.88	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.89	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.90	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.91	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.92	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.93	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.94	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.95	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.96	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.97	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.98	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.99	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

قائمة المراجع

أولاً : المراجع العربية :

١ - أحمد رفيق قاسم (١٩٩٢) ، **المدخل إلى بحوث العمليات** ، منشورات جامعة حلب – كلية الاقتصاد .

٢ - أحمد محمد زامل ، عبد الغفار شحاتة (٢٠٠٣) ، **بحوث العمليات في المحاسبة** ، المكتبة العلمية ، الزقازيق .

٣ - إسماعيل السيد ، جلال العبد (٢٠٠٣) ، **الأساليب الكمية في الإدارة** ، الدار الجامعية ، الأسكندرية .

٤ - تركي إبراهيم سلطان (١٩٨٧) ، **التحليلات الكمية في إتخاذ القرار** ، المركز الأمريكي للإستشارات الهندسية ، كندا .

٥ - حسن حسنى الغباري (١٩٨٨) ، **سلسلة ملخصات شوم : بحوث العمليات** ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، القاهرة .

٦ - حسن عبد الله أبو ركبة (١٩٨٦) ، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في مجال الإدارة** ، الطبعة الرابعة ، مطابع دار البلاد ، جدة .

٧ - سلطان محمد عبد الحميد ، محمد توفيق البلقيني (٢٠٠٢) ، **مقدمة في بحوث العمليات** ، مكتبة الجلاء الجديدة ، المنصورة .

٨ - سمير أبو الفتوح صالح (٢٠٠١) ، **بحوث العمليات لدعم القرارات في ظل التشغيل الإلكتروني** ، مكتبة الجلاء الجديدة ، المنصورة .

٩ ـ محمد صالح الحناوي ، محمد توفيق ماضي (٢٠٠١) ، **بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج** ، الدار الجامعية ، الأسكندرية .

١٠ـ محمد فتحي محمد علي (١٩٩٤) ، **الإحصاء التجاري وبحوث العمليات** ، الجزء الأول ، مكتبة عين شمس ، القاهرة .

١١ـ محمد فخري مكي (١٩٩٣) ، **نماذج بحوث العمليات في التطبيق الاقتصادي** ، مكتبة المدينة ، الزقازيق .

١٢ـ محمد فخري مكي وآخرون (٢٠٠٢) ، **بحوث العمليات في إنتاج وترشيد المعلومات المحاسبية** ، مكتبة المدينة ، الزقازيق .

ثانياً : المراجع الأجنبية :

1. Abraham, M.G. (2001), **An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games,** Dover Publications, INC. Mineola, New York.
2. Anderson, D.R., Sweeney, D.J., and Williams, T.A. (2000), **An Introduction to Management Science: Quantitative Applications to Decision Making,** Ninth Edition, South-Western College Publishing, New York.
3. Barry, R., Ralph, M., and Stair, J.R. (2001), **Quantitative Analysis for Management,** Seventh Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

4. Bronson, R. (1982), **Operations Research**, Mc. Graw Hill Book Comp.

5. Bronson, R. and Naadimuthu, G. (2002), **Schaum's Outline of Operations** Research, Second Edition, Mc. Graw Hill, New York.

6. Curwin, J. and Slater, R. (2002), **Quantitative Methods for Business Decisions,** Fifth Edition, Thomson Learning, London.

7. Ecker, J.G. and Kupferschmid (1988), **Introduction to Operations Research,** John-Wiley & Sons, New York.

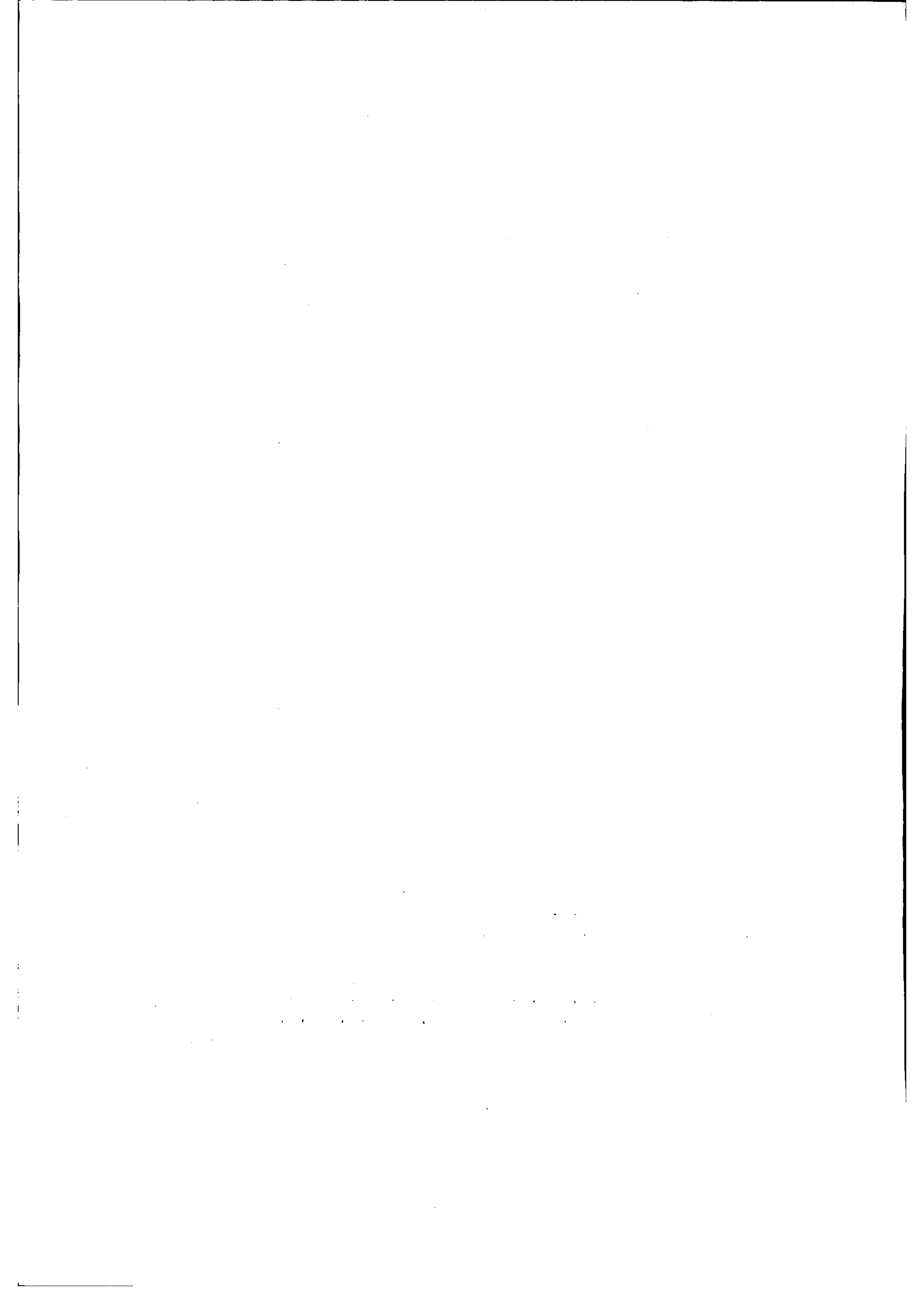
8. Gupta, P.K. and Hira, D.S. (1999), **Operations Research,** S. Chand & Comp. LTD, New Delhi.

9. Hiller, F.S. and Lieberman, G.J. (1999), **Introduction to Operations Research**, Mc. Graw Hill International Editions, New York.

10. Richard, E.T. (1981), **Quantitative Methods for Decision Making in Business,** The Dryden Press.

11. Taha, H.A. (2004), **Operations Research**: **An Introduction,** Seventh Edition, Macmillan Publishing.

12. Zionts, S. (1974), **Linear and Integer Programming,** Prentice-Hall, Inc. NJ.




شركة ناس للطباعة
٢٣ ش رشدى عابدين - ٣٩٢٥٢٧٦